CLEAM

A.A. 2025/2026

B.LAB

DISPENSA

MATEMATICA (MODULO 1)

-PRIMO PARZIALE-

SCRITTA DA

ALESSIA BRONGO

TEACHING DIVISION

Questa dispensa è scritta da studenti senza alcuna intenzione di sostituire i materiali universitari.

Essa costituisce uno strumento utile allo studio della materia, ma non garantisce una preparazione altrettanto esaustiva e completa al fine del superamento dell'esame quanto il materiale consigliato dall'università.

Il contenuto potrebbe contenere errori e non è stato in alcun modo rivisto né approvato dai docenti. Si consiglia di utilizzarlo come supporto integrativo, da affiancare in ogni modo alle fonti e materiali ufficiali indicate nei programmi d'esame.

Appunti Mate 1 - Primo parziale

Seguono gli appunti presi in classe di Mate 1 - Primo parziale, riguardanti questi macroargomenti:

- Insiemi;
- Funzioni;
- Successioni;
- Serie numeriche;
- Limiti.

In grigio: esercizi, esempi, chiarimenti passaggi.

06-09-2024

INSIEMI

A, B, ...

(1) $A = \{a, b, c, 1, 2\}$ elenco ; $b \in A$; $5 \notin A$

(2) $B = \{m : m \text{ pari}\}$ proprietà

$A : \{1, 2, 3, 4, 5\}$ $\quad B \subseteq A$

$B : \{2 ; 3\}$

$A : \{1, 2, 3, 4\}$ $\quad$ Intersezione A e B

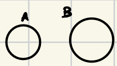
$B : \{0, 1, 3, 5\}$ $\quad A \cap B = \{1, 3\}$ elementi in comune

---

Unione di A e B $\quad$ tutti gli elementi

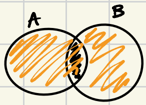
$A \cup B : \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

(3) DIAGRAMMA DI VENN



Intersezione

Unione



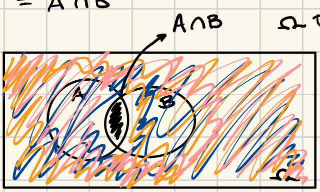
LEGGI DI DE MORGAN

Teorema

1) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

2) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

Ω tutti gli elementi

① 

complementare dell'interezione

A^c

B^c

SIMBOLI

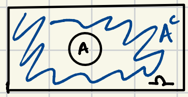
$\emptyset$ insieme vuoto

$b \in A$ appartiene

$\notin$ non appartiene

$\subseteq$ incluso in

INSIEMI COMPLEMENTARI



② Fai da sola il disegno e la dim. sul libro

↳ vedi pag 7 del quaderno

De Morgan 1

Dim: i) Dimostro che $(A \cap B)^c \subseteq A^c \cup B^c$

$x \in (A \cap B)^c \iff x \notin A \cap B \iff x \notin A$ oppure $x \notin B$
(se $x \in$ sia ad A che a B sarebbe nell' intersezione)

$\iff x \in A^c$ oppure $x \in B^c \iff x \in A^c \cup B^c$

ii) Dimostro che $A^c \cup B^c \subseteq (A \cap B)^c$

$x \in A^c \cup B^c \iff x \in A^c$ oppure $x \in B^c \iff x \notin A$ oppure $x \notin B \iff x \notin A \cap B \iff x \in (A \cap B)^c$

A, B

Differenza $A - B$

Esempio

$A : \{1, 2, 3, 4\}$; $B = \{1, 3\}$

$A - B = \{2, 4\}$

elementi di A che non appartiene a B

Teorema (H) ENUNCIATO Se A è un sottoinsieme di uno spazio Ω (mondo), allora $(A^c)^c = A$

PROPRIETÀ DEL DOPPIO COMPLEMENTO

Insiemi Numerici

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$, numeri naturali

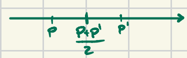
$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$, numeri interi relativi $\qquad \mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$

$\mathbb{Q} = \{\pm \frac{m}{n} ; m, n \in \mathbb{N}, n \neq 0\}$, numeri razionali $\qquad \mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$

$\mathbb{R}$ = numeri reali (sia razionali e irrazionali) $\qquad \mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$

↳ funzione BIIETTIVA con la retta orientata

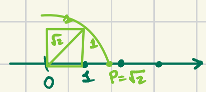
N.B. Tra due numeri razionali $P, P' \in \mathbb{Q}$ se ne trovano infiniti altri



$P = \frac{m}{n}$; $m, n \in \mathbb{N}$; $P' = \frac{m'}{n'}$; $m', n' \in \mathbb{N}$

$$\frac{P+P'}{2} = \frac{mn' + m'n}{2nn'} \in \mathbb{Q}$$

Si dice che $\mathbb{Q}$ è denso



retta orientata

INTERVALLI in $\mathbb{R}$

$[a,b]$ — $[$ incluso

$[a,b)$ — $($ non incluso

$(a;b]$

$(a;b)$

Gli intervalli sono tutti sottoinsieme di $\mathbb{R}$

$$A=[2,3]\cup\{5\}$$

PROPRIETÀ DEI SOTTOINSIEMI DI $\mathbb{R}$

Maggioranti e Minoranti di $A \subseteq \mathbb{R}$

Def $A \subseteq \mathbb{R}$, non vuoto. Un numero $h \in \mathbb{R}$ è un maggiorante di A quando $h \geq x$, $\forall x \in A$

Un numero $h' \in \mathbb{R}$ è un minorante di A quando $h' \leq x$, $\forall x \in A$

Esempi

$A=[2;3)$ magg $\underbrace{[3;+\infty)}_{\text{infiniti}}$; minoranti $(-\infty;2]$

INSIEMI LIMITATI

Def: $A \subseteq \mathbb{R}$, non vuoto

i) A si dice superiormente limitato quando $\exists$ un maggiorante di A.

ii) A si dice inferiormente limitato quando $\exists$ un minorante

iii) A si dice limitato se è limitato sia inf. che sup.

Esempio i) $A=[2,3)$ limitato

ii) $\mathbb{N}$; minoranti $=(-\infty;0]$ lim. inf. ma non sup.

Massimo e minimo di un insieme

Def: $A \subseteq \mathbb{R}$, non vuoto

Si dice che $a \in A$ è massimo di A quando

$a \geq x$, $\forall x \in A$

Def: $A \subseteq \mathbb{R}$, non vuoto

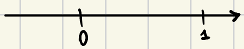
Si dice che $a \in A$ è minimo di A quando

$a \leq x, \ \forall x \in A$

Esempi 1) $A = [2;3]$ $\max = 3$, $\min = 2$

2) $A = [2;3)$ max non esiste $\nexists \max A$, $\min = 2$

3) $A = \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}, n \neq 0\}$



$(0;1]$

A limitato sup
maggioranti $= [1;+\infty)$

A limitato inf
minoranti $= (-\infty;0]$

$\max A = 1$; $0 \notin A \Rightarrow \nexists \min A$

vedi pag

Teorema (H) max e min di un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ se esistono sono unici

---

Estremo superiore e inferiore di un insieme

Def. $A \subseteq \mathbb{R}$, non vuoto

S si dice estremo superiore di A quando è il più piccolo dei maggioranti di A

s si dice estremo inferiore di A quando è il più grande dei minoranti di A

massimo $\Rightarrow$ estremo sup, $\not\Leftarrow$

minimo $\Rightarrow$ estremo inf, $\not\Leftarrow$

ex $A = [2;3)$

$3 = \sup A$

L'est sup e inf di un insieme limitato esistono SEMPRE.

TEOREMA (di completezza dei numeri reali)

Ogni insieme $A \subseteq \mathbb{R}$, non vuoto, possiede estremo superiore, se A è limitato superiormente ed estremo inf. se A è limitato inf.

TEOREMA (H) caratterizzazione di estremo sup/inf ...

Dato $A \subseteq \mathbb{R}$, non vuoto

le seguenti affermazioni sono equivalenti:

i) $S = \sup A$

ii) $S \geq x, \forall x \in A$;

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \bar{x} \in A$ tale che $\bar{x} > S - \varepsilon$

↳ un elemento di A diverso di x

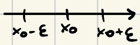
INTORNI in $\mathbb{R}$

$x_0 \in \mathbb{R}$

Intorno di x_0

$U_\varepsilon(x_0) = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon), \; \varepsilon > 0$

↳ raggio dell'Intorno



$U(x_0) = (x_0 - \varepsilon ; x_0 + \varepsilon) =$

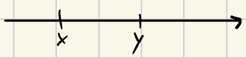
$= \{x \in \mathbb{R} : d(x, x_0) < \varepsilon\} =$

$= \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < \varepsilon\}$

Valore assoluto o modulo

$x \in \mathbb{R}; \; |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$

$x, y \in \mathbb{R}; \; d(x,y) = |x - y|$



Struttura topologica di $\mathbb{R}$

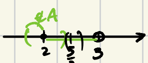
Def Un punto $a \in \mathbb{R}$ si dice interno ad $A \subseteq \mathbb{R}$ quando:

i) $a \in A$;

ii) esiste un intorno di a contenuto in A

Esempio

$A = [2, 3)$ $\quad\quad$ $\text{Int } A = (2; 3)$

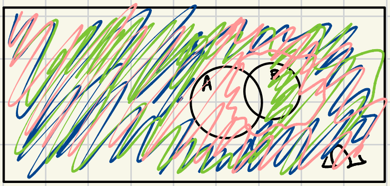


$3 \notin A$

De Morgan 2

pag 10 sul libro

$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$



$(A \cup B)^c$
A^c
B^c

Dim i) Dimostro che $(A \cup B)^c \subseteq A^c \cap B^c$

$x \in (A \cup B)^c \iff x \notin A \cup B \implies x \notin A$ oppure $x \notin B \implies x \in A^c \wedge x \in B^c \implies x \in A^c \cap B^c$

ii) Dimostro che $A^c \cap B^c \subseteq (A \cup B)^c$

$x \in A^c \cap B^c \implies x \notin A \wedge x \notin B \implies x \notin A \cup B \implies x \in (A \cup B)^c$

Proprietà del doppio complemento

pag 8 sul libro

ENUNCIATO

Se A è un sottoinsieme di uno spazio Ω, allora $(A^c)^c = A$

Dim i) Dimostriamo $(A^c)^c \subseteq A$

$a \in (A^c)^c \implies a \notin A^c \iff a \in A \implies (A^c)^c \subseteq A$

ii) Dimostriamo $A \subseteq (A^c)^c$

$a \in A \implies a \notin A^c \implies a \in (A^c)^c \implies A \subseteq (A^c)^c$

Teorema dell' unicità del massimo e minimo

pag 26 sul libro

ENUNCIATO

L'insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ ha al massimo un massimo e un minimo

Dim $\hat{x}_1, \hat{x}_2 \in A$ per assurdo 2 massimi di A
con $\hat{x}_1 \neq \hat{x}_2$

Dato che $\hat{x}_1$ é un massimo di A $\Rightarrow \hat{x}_1 \geq x \quad \forall x \in A$
essendo $\hat{x}_2 \in A \Rightarrow \hat{x}_1 \geq \hat{x}_2$
Essendo anche $\hat{x}_2$ massimo di A $\Rightarrow \hat{x}_2 \geq \hat{x}_1$
$\Bigg\} \Rightarrow \hat{x}_1 = \hat{x}_2$

In egual modo si dimostra l'unicità del minimo

Teorema di caratterizzazione di estremo sup/inf (Andreano)

Dato $A \subseteq \mathbb{R}$, non vuoto
le seguenti affermazioni sono equivalenti:

i) $S = \sup A$

ii) $S \geq x, \forall x \in A$;
$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \bar{x} \in A$ tale che $\bar{x} > S - \varepsilon$

un elemento di A diverso di x

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$.
Allora $a = \sup A \Leftrightarrow x \leq a \quad \forall x \in A$
$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x_\varepsilon \in A$

tale che $x_\varepsilon \in (a - \varepsilon ; a]$

Dim
$a = \sup A$
a é il piu piccolo dei maggioranti $\Leftrightarrow$ a é un maggiorante $\Leftrightarrow x \leq a \quad \forall x A$

a é il piccolo dei maggioranti quindi $\forall \varepsilon > 0$, $a - \varepsilon$ non é piú maggiorante, cioè $\exists x_\varepsilon \in A$

tale che $x_\varepsilon > a - \varepsilon$

$\iff a - \varepsilon < x_\varepsilon \leq a$

$\iff x_\varepsilon \in (a-\varepsilon ; a]$ $\square$

Dim. del prof $\to$ usando gli INTORNI SINISTRI E DESTRI

Dato $A \subseteq \mathbb{R}$, non vuoto

i) le seguenti affermazioni sono equivalenti:

1) $S = \sup A$

2) $S \geq a,\ \forall a \in A$;

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \bar{a} \in A$ tale che $\bar{a} > S - \varepsilon$

ii) Le seguenti affermazioni sono equivalenti

3) $s = \inf A$

4) $s \leq a,\ \forall a \in A$;

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \bar{a} \in A$ tale che $\bar{a} < s + \varepsilon$

Dim i) 1) $\Rightarrow$ 2) Sia $S = \sup A$.

Siccome S è un maggiorante di A si ha

$S \geq a,\ \forall a \in A$

Sia $\varepsilon > 0$. Siccome S è il più piccolo dei maggioranti di A, allora $S - \varepsilon$ non è un maggiorante di A.

Quindi $\exists\, \bar{a} \in A$ tale che $\bar{a} < S - \varepsilon$.

2) $\Rightarrow$ 1) Sia $S \in \mathbb{R}$ tale che $S \geq a,\ \forall a \in A$ e $\forall \varepsilon > 0\ \exists \bar{a} \in A$ tale che $\bar{a} > S - \varepsilon$.

Siccome $S \geq a,\ \forall a \in A$, si ha che S è un maggiorante di A. Inoltre siccome $\forall \varepsilon > 0$ abbiamo un $\bar{a} \in A$ con $\bar{a} > S - \varepsilon$, ogni numero $K = S - \varepsilon$ non è un maggiorante di A. Pertanto non vi sono maggioranti di A minori di S e quindi S è il più piccolo dei maggioranti di A, ossia $S = \sup A$.

ii) 3) $\Rightarrow$ 4) Sia $s = \inf A$.

Siccome s è un minorante di A si ha

$s \leq a,\ \forall a \in A$.

Sia $\varepsilon > 0$. Siccome s è il più grande dei minoranti di A, allora $s + \varepsilon$ non è un minorante di A.

Quindi $\exists\, \bar{a} \in A$ tale che $\bar{a} < s + \varepsilon$.

4) => 3) Sia $s \in \mathbb{R}$ tale che $s \leq a$, $\forall a \in A$ e $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \bar{a} \in A$ tale che $\bar{a} < s + \varepsilon$.

Siccome $s \leq a$, $\forall a \in A$, si ha che s è un minorante di A. Inoltre, siccome $\forall \varepsilon > 0$ abbiamo un $\bar{a} \in A$ tale che $\bar{a} < s + \varepsilon$, ogni numero $K = s + \varepsilon$ non è un minorante di A. Pertanto non vi sono minoranti di A maggiori di s e quindi s è il più grande dei minoranti di A, ossia $s = \inf A$.

C.V.D.

10-09-2024 Martedì

Dal 13 Settembre ci saranno gli HOMEWORK

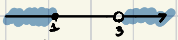
$\mathbb{R}$

Def $A \subseteq \mathbb{R}$, non vuoto. $a \in A$ si dice interno di A, quando $\exists\, U(a)$ contenuto in A

ex. $A = [1,3]$

Def $A \subseteq \mathbb{R}$, non vuoto. $a \notin A$ $(a \in A^c)$ si dice esterno ad A quando $\exists\, U(a)$ contenuto in A^c

Esempio 1) $A = [1;3)$



$A^c = (-\infty;1) \cup [3;+\infty)$

Esterni ad $A = (-\infty;1) \cup (3;+\infty)$

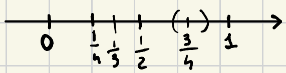
Def $A \subseteq \mathbb{R}$, non vuoto. $a \in \mathbb{R}$ si dice di frontiera per A quando non è né interno né esterno.

∂A = punti di frontiera → negli intervalli → GLI ESTREMI

$A = [1,3)$; $\partial A = \{1;3\}$

Esempio $A = \{\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}, n \neq 0\} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \dots\}$

$0 \notin A$



1 non è interno

$\text{int}\, A = \emptyset$; $\frac{3}{4} \notin A$
↳ esterno ad A

$\partial A = A \cup \{0\}$

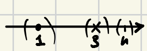
Esterni di $A = \mathbb{R} - (A \cup \{0\})$

Punti di Accumulazione

Def $A \subseteq \mathbb{R}$, A non vuoto

$a \in \mathbb{R}$ si dice di accumulazione per A quando ogni suo intorno contiene almeno un punto di A diverso da a.

Esempio 1) $A = [1;3)$



$A' = [1;3]$
↳ derivato

1) a punto di accumulazione $\Rightarrow$ a punto di frontiera FALSO

2) a punto di frontiera $\Rightarrow$ a punto di accumulazione FALSO

PUNTO ISOLATO

Def $A \subseteq \mathbb{R}$, A non vuoto. a si dice punto isolato di A quando:

i) $a \in A$

ii) a non è punto di accumulazione per A

1) a isolato $\Rightarrow$ a di accumulazione FALSO

2) a isolato $\Rightarrow$ a di frontiera VERO

INSIEMI APERTI E CHIUSI

Def $A \subseteq \mathbb{R}$, non vuoto è aperto quando ogni suo punto è interno

ex $A: [1;3)$ non è aperto perchè 1 è di frontiera

$A: (1;3)$ è aperto

Def $A \subseteq \mathbb{R}$, A non vuoto. A è chiuso quando $\partial A \subseteq A$. $(A' \subseteq A)$

CHIUSURA DI UN INSIEME

$\bar{A} = A \cup \partial A$

<u>Esempio</u> 1) $A = \{ \frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}, n \neq 0 \}$

$\bar{A} = A \cup (A \cup \{0\}) = A \cup \{0\}$

2) $A = [1;3]$; $\partial A = \{1;3\}$

$\bar{A} = A$

<u>N.B.</u> Se A è chiuso, allora $\bar{A} = A$

$\mathbb{R}$

$\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} = \overline{\mathbb{R}}$

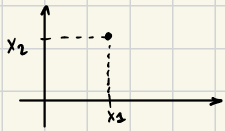
$U(+\infty) = (a; +\infty)$, $a \in \mathbb{R}$

a

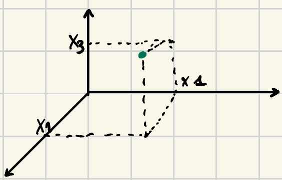
$U(-\infty) = (-\infty; b)$, $b \in \mathbb{R}$

$\mathbb{R}^n$

$n = 2$; $\mathbb{R}^2 = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\}$



$n = 3 = \mathbb{R}^3 = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}; x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$



$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R} \right\}$

$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$

n-uple di numeri reali

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix}}, x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R} \right\}$$

$(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ↳ n-upla di numeri reali $\underline{x}$

$x \to$ numero $\to$ indice in basso

$\underline{x} \to$ elementi $\to$ indice in ALTO ex $x_1 \to \underline{x}^1$

OPERAZIONI TRA ELEMENTI DI $\mathbb{R}^n$

1) Somma tra elementi di $\mathbb{R}^n$

Esempio

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

$$\underline{y} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -7 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

$$\underline{x} + \underline{y} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n, \ \underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} ; \ \underline{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

$$\underline{x} + \underline{y} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{bmatrix} = \underline{z} \in \mathbb{R}^n$$

2) Prodotto di un elemento di $\mathbb{R}^n$ per un numero reale

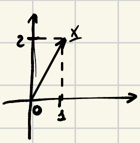
$$\underline{x} \in \mathbb{R}^n ; \ \alpha \in \mathbb{R}$$

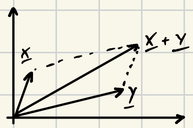
$$\alpha \cdot \underline{x} = \begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

N.B. $\mathbb{R}^n$ dotato delle operazioni 1) e 2) è uno spazio verticale. I suoi elementi si dicono vettori

$\mathbb{R}^2$; $\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

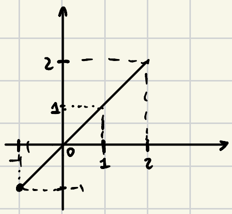
Esempio $\underline{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$





Esempio

$\mathbb{R}^2$; $\underline{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$; $2\underline{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$; $-1\underline{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$



PROPRIETÀ DELLE OPERAZIONI IN $\mathbb{R}^n$

Proprietà della somma

1) $\underline{x} + \underline{y} \in \mathbb{R}^n$
2) $\underline{x} + \underline{y} = \underline{y} + \underline{x}$ (commutativa)
3) $\underline{x} + (\underline{y} + \underline{z}) = (\underline{x} + \underline{y}) + \underline{z}$ (associativa)
4) $\underline{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$

   $\underline{x} + \underline{0} = \underline{x}$

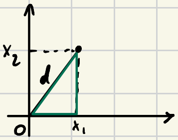
5) $-\underline{x} = \begin{bmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ \vdots \\ -x_n \end{bmatrix}$; $\underline{x} + (-\underline{x}) = \underline{0}$

Proprietà del prodotto per un numero $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$; $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$

1) $\alpha \underline{x} \in \mathbb{R}^n$
2) $\alpha(\underline{x} + \underline{y}) = \alpha \underline{x} + \alpha \underline{y}$ (distributiva)
3) $(\alpha + \beta)\underline{x} = \alpha \underline{x} + \beta \underline{x}$ (//)
4) $1 \cdot \underline{x} = \underline{x}$
5) $\alpha(\beta \underline{x}) = (\alpha\beta)\underline{x}$
6) $0 \cdot \underline{x} = \underline{0}$

Norma di un vettore di $\mathbb{R}^m$

$\mathbb{R}^m$; $\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

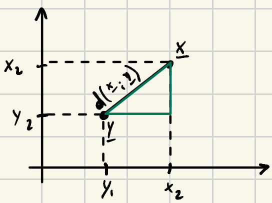


$$d = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = \|\underline{x}\| = \text{norma di } \underline{x}$$

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} ; \quad \boxed{\|\underline{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_m^2}}$$

$\mathbb{R}^2$

$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$; $\underline{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$



$$d(\underline{x} ; \underline{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

$$\underline{x} - \underline{y} = \begin{bmatrix} x_1 - y_1 \\ x_2 - y_2 \end{bmatrix}$$

$$d(\underline{x} ; \underline{y}) = \|\underline{x} - \underline{y}\|$$

N.B. $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^m$; $d(\underline{x} ; \underline{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_m - y_m)^2} = \|\underline{x} - \underline{y}\|$

↳ DISTANZA EUCLIDEA

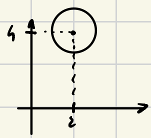
Esempio $\underline{x}^0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$; $\underline{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

1) $d(\underline{x} ; \underline{x}^0) = \sqrt{(2-1)^2 + (4-3)^2} = \sqrt{2}$

2) Rappresentare l'insieme

$$\left\{ \underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 : d(\underline{x} ; \underline{x}^0) = \sqrt{2} \right\} = \left\{ \underline{x} \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x_1-2)^2 + (x_2-4)^2} = \sqrt{2} \right\} = \left\{ \underline{x} \in \mathbb{R}^2 : \boxed{(x_1-2)^2 + (x_2-4)^2 = 2} \right\}$$

↓ CIRCONFERENZA



3) $A_1 = \{ \underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 : d(\underline{x}; \underline{x}^0) \leq \sqrt{2} \}$

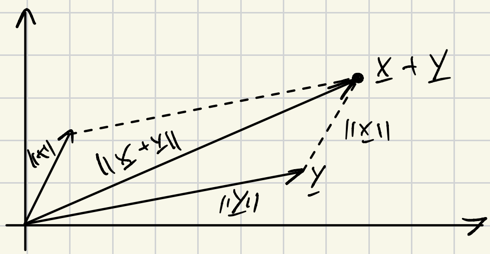
Proprietà della norma; $\|\underline{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$

1) $\|\underline{x}\| \geq 0;\ \forall\, \underline{x} \in \mathbb{R}^m$

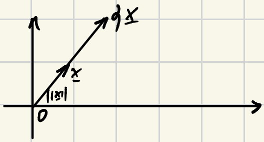
2) $\|\underline{x}\| = \underline{0} \iff \underline{x} = \underline{0}$

3) Disuguaglianza triangolare

$$\|\underline{x} + \underline{y}\| \leq \|\underline{x}\| + \|\underline{y}\|,\ \forall\, \underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^m$$



4) Di omogeneità: $\alpha \in \mathbb{R};\ \|\alpha\, \underline{x}\| = |\alpha| \cdot \|\underline{x}\|$



Prodotto interno o scalare tra vettori

$\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}$

$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix};\ \underline{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$

$\underline{x} \cdot \underline{y} = \langle \underline{x}; \underline{y} \rangle = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + \dots + x_m \cdot y_m$

<u>Esempio</u> $\underline{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix};\ \underline{y} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\underline{x} \cdot \underline{y} = -1 - 1 = -2$

5) Disuguaglianza di Cauchy - Schwarz

$$|\underline{x} \cdot \underline{y}| \leq \|\underline{x}\| \cdot \|\underline{y}\|, \forall \underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^m$$

$$-1 \leq \frac{\underline{x} \cdot \underline{y}}{\|\underline{x}\| \cdot \|\underline{y}\|} \leq 1$$

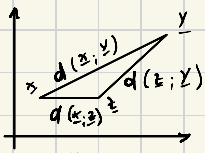
$\underline{x}; \underline{y} \in \mathbb{R}^m$

$d(\underline{x}; \underline{y}) = \|\underline{x} - \underline{y}\|$

PROPRIETA' DELLA DISTANZA EUCLIDEA

1) $d(\underline{x}; \underline{y}) = d(\underline{y}; \underline{x}), \forall \underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^m$
2) $d(\underline{x}; \underline{y}) = 0 \iff \underline{x} = \underline{y}$
3) $d(\underline{x}, \underline{y}) \geq 0, \forall \underline{x}, \underline{y}$

4) $d(\underline{x}; \underline{y}) \leq d(\underline{x}; \underline{z}) + d(\underline{z}; \underline{y}), \forall \underline{x}, \underline{y}, \underline{z} \in \mathbb{R}$



INTORNI IN $\mathbb{R}^n$

$\mathbb{R}, x_0 \in \mathbb{R}; U(x_0) = (x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon) =$
$= \{x \in \mathbb{R} : d(x, x_0) < \varepsilon\} = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < \varepsilon\}$

$\mathbb{R}^m; \underline{x}^0 \in \mathbb{R}^m; U_\varepsilon(\underline{x}^0) = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^m : d(\underline{x}; \underline{x}^0) < \varepsilon\} = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^m : \|\underline{x} - \underline{x}^0\| < \varepsilon\}, \varepsilon > 0$

Disuguaglianza Triangolare (H+Prog)

Teorema

$\forall\, \underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}$ si ha

1) $\|\underline{x}+\underline{y}\| \leq \|\underline{x}\|+\|\underline{y}\|$

Dim Per mostrare che la disuguaglianza è verificata consideriamo il quadrato di ambo i membri:

$$(\|\underline{x}+\underline{y}\|)^2 \leq (\|\underline{x}\| + \|\underline{y}\|)^2;$$

$$\|\underline{x}+\underline{y}\|^2 \leq \|\underline{x}\|^2 + \|\underline{y}\|^2 + 2\|\underline{x}\| \cdot \|\underline{y}\|$$

Per definizione di norma di un vettore:

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^2 \leq \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} y_i^2 + 2\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

e quindi

$$\cancel{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} + \cancel{\sum_{i=1}^{n} y_i^2} + 2\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i \leq \cancel{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} + \cancel{\sum_{i=1}^{n} y_i^2} + 2\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Semplificando:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

ossia

$*)\ \underline{x} \cdot \underline{y} \leq \|\underline{x}\| \cdot \|\underline{y}\|$

Per la disuguaglianza di Cauchy - Schwarz si ha $|\underline{x} \cdot \underline{y}| \leq \|\underline{x}\| \cdot \|\underline{y}\|$ e quindi in particolare $\underline{x} \cdot \underline{y} \leq \|\underline{x}\| \cdot \|\underline{y}\|$ che prova la $*)$ che è equivalente alla 1) per i calcoli effettuati.

C.V.D.

TEOREMA (H → prog)

$(\Leftarrow\Rightarrow)$ → devo dim entrambi i sensi

Un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^n$ è chiuso se e solo se il suo complementare è aperto.

Dim $\Rightarrow$ Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme chiuso. Sia $\underline{x} \in A^c$, ossia $\underline{x} \notin A$. Quindi $\underline{x}$ non è un punto di frontiera di A, siccome A è chiuso.

Allora è un punto esterno ad A. Vale a dire che $\exists r > 0$ tale che $U_r(\underline{x}) \subseteq A^c$. Pertanto x è un punto interno di A^c e quindi A^c è aperto.

$\Leftarrow$ Sia $A^c \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme aperto. Sia $\underline{x}$ un punto di frontiera di A. Per assurdo supponiamo che $\underline{x} \notin A$, ossia $\underline{x} \in A^c$.

Siccome A^c è aperto $\exists\ U_r(\underline{x}) \subseteq A^c$ e pertanto $A \cap U_r(\underline{x}) = \emptyset$.

Ma allora $\underline{x}$ non può essere un punto di frontiera di A.

Otteniamo quindi una contraddizione e si deduce quindi che deve essere $\underline{x} \in A$. Pertanto A contiene i suoi punti di frontiera e quindi è un insieme chiuso.

C.V.D.

TEOREMA ($H \to$ prof)

Un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^m$ è chiuso se e solo se contiene tutti i suoi punti di accumulazione.

Dim $\Rightarrow$ Sia $A \subseteq \mathbb{R}^m$ un insieme chiuso. Per definizione contiene tutti i suoi punti di frontiera. Per assurdo, supponiamo che esista un punto di accumulazione $\underline{x}^0 \notin A$.

Per definizione di punto di accumulazione $\forall U(\underline{x}^0)\ \exists\ \underline{x} \neq \underline{x}^0$ tale che $\underline{x} \in U(\underline{x}^0) \cap A$. Quindi in $U(\underline{x}^0)$ vi sono punti che appartengono ad A e ad A^c. Si deduce che $\underline{x}^0$ è un punto di frontiera. Ma siccome A è chiuso deve contenere tutti i punti di frontiera e abbiamo quindi una contraddizione. Pertanto tutti i punti di accumulazione devono appartenere ad A.

$\Leftarrow$ Sia $A \subseteq \mathbb{R}^m$ un insieme che contiene tutti i suoi punti di accumulazione. Sia $\underline{x}^0$ un punto di accumulazione di A. Se se fosse stato $\to \underline{x}^0$ è un punto isolato di A, allora $\underline{x}^0 \in A$ per definizione (in questo caso $\underline{x}^0$ è e quindi sarebbe sicuramente di frontiera). Ma noi abbiamo un punto di accum.

Se $\underline{x}^0$ è un punto di frontiera che non è isolato, allora $\underline{x}^0$ è un punto di accumulazione e quindi $\underline{x}^0 \in A$. Pertanto A contiene tutti i punti di frontiera e quindi è chiuso.

C. V. D.

13-09-2024

INTORNI IN $\mathbb{R}^n$

$\underline{x}^\circ \in \mathbb{R}^m$

$U_\varepsilon(\underline{x}^\circ) = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^m : d(\underline{x}; \underline{x}^\circ) < \varepsilon\} = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^m : \|\underline{x} - \underline{x}^\circ\| < \varepsilon\}$

Esempio $\mathbb{R}^2$; $\underline{x}^\circ = \begin{bmatrix} x_1^\circ \\ x_2^\circ \end{bmatrix}$; $U_\varepsilon(\underline{x}^\circ) = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^2 : \|\underline{x} - \underline{x}^\circ\| < \varepsilon\} = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x_1 - x_1^\circ)^2 - (x_2 - x_2^\circ)} < \varepsilon\} = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^2 : (x_1 - x_1^\circ)^2 + (x_2 - x_2^\circ)^2 < \varepsilon\}$

$\mathbb{R}^2 \to$ circonferenza

$\mathbb{R}^3 \to$ sfera

Gli intorni di $\mathbb{R}$ servono per classificare i punti con le proprie proprietà

Def in $\mathbb{R}$ = Def in $\mathbb{R}^n$

PUNTI INTERNI IN $\mathbb{R}^n$

Def $A \subseteq \mathbb{R}^n$, non vuoto. $\underline{x}^\circ \in A$ è punto interno ad A quando $\exists\, U_\varepsilon(\underline{x}^\circ) \subseteq A$.

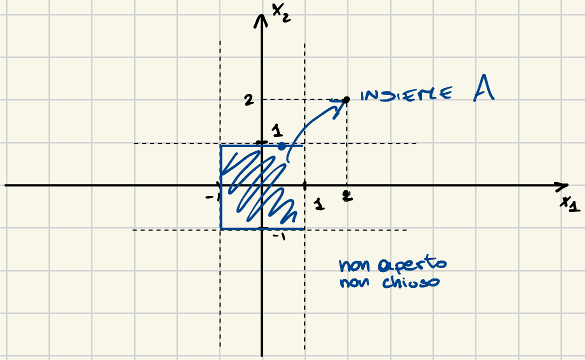
PUNTI ESTERNO IN $\mathbb{R}^n$

Def $A \subseteq \mathbb{R}^m$, non vuoto.

$\underline{x}^\circ \in \mathbb{R}^m$ è esterno ad A quando è interno ad A^C.

Esempio

$A = \{\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 : -1 \le x_1 < 1 ; -1 \le x_2 \le 1\}$



non aperto
non chiuso

PUNTI DI ACCUMULAZIONE IN $\mathbb{R}^n$

Def. $A \subseteq \mathbb{R}^m$, non vuoto.

$\underline{x}^\circ \in \mathbb{R}^n$ è punto di accumulazione per A quando in ogni suo intorno $\exists\, \underline{x}' \in A$ con $\underline{x}' \neq \underline{x}^\circ$

Esempio (guarda imm precedente)

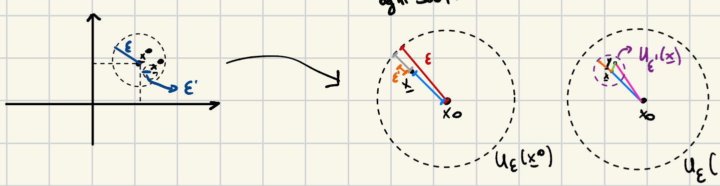
$A' = \left\{ \underline{x} \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x_1 \leq 1;\ -1 \leq x_2 \leq 1 \right\}$

$B = A \cup \underbrace{\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}}_{\text{punto isolato di B}}$

TEOREMA

GLI INTORNI DI $\mathbb{R}^n$ SONO INSIEMI APERTI

Dim $\underline{x}^\circ \in \mathbb{R}^n$; $U_\varepsilon(\underline{x}^\circ)$. Dimostriamo che $U_\varepsilon(\underline{x}^\circ)$ è aperto.
$\Downarrow$
ogni suo punto è interno



Considero $\underline{x} \in U_\varepsilon(\underline{x}^\circ)$ e mostro che $\underline{x}$ è interno a $U_\varepsilon(\underline{x}^\circ)$. Scegliamo un raggio ε' tale che: $0 < \varepsilon' < \varepsilon - \overbrace{d(\underline{x}, \underline{x}^\circ)}^{\|\underline{x} - \underline{x}^\circ\|}$

Devo trovare un intorno $U_{\varepsilon'}(\underline{x}) \subseteq U_\varepsilon(\underline{x}^\circ)$. Consideriamo $U_{\varepsilon'}(\underline{x})$, cioè l'intorno di raggio ε' centrato in x.

Ossia, devo trovare $U_{\varepsilon'}(\underline{x})$ tale che $\forall\, \underline{y} \in U_{\varepsilon'}(\underline{x})$ si ha $\underline{y} \in U_\varepsilon(\underline{x}^\circ)$

Devo mostrare che $\|\underline{y} - \underline{x}^\circ\| < \varepsilon$.

Si ha: $\|\underline{y} - \underline{x}^\circ\| = \|(\underline{y} - \underline{x}) + (\underline{x} - \underline{x}^\circ)\| \leq \underbrace{\|\underline{y} - \underline{x}\|}_{< \varepsilon'} + \|\underline{x} - \underline{x}^\circ\| < \varepsilon' + \|\underline{x} - \underline{x}^\circ\| < \varepsilon$

$< \varepsilon'$ perché y lo abbiamo preso appartenente a $U_{\varepsilon'}(\underline{x})$

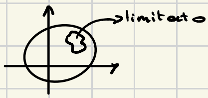
Si ha $\varepsilon' + \|\underline{x} - \underline{x}^\circ\| < \varepsilon$ per $\varepsilon' < \varepsilon - \|\underline{x} - \underline{x}^\circ\|$

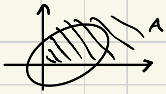
GUARDA SUL PROG. I TEOREMI HOMEWORK

INSIEME COMPATTO = CHIUSO + LIMITATO

INSIEME LIMITATO IN $\mathbb{R}^n$

Def. $A \subseteq \mathbb{R}^n$ è limitato quando $\exists\, U_\varepsilon(\underline{0})$ tale che $A \subseteq U_\varepsilon(\underline{0})$





VETTORI $\underline{x}^1, \underline{x}^2, \dots, \underline{x}^k \in \mathbb{R}^n$

NUMERI $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_k \in \mathbb{R}$

$\vartheta_1 \underline{x}^1 + \vartheta_2 \underline{x}^2 + \dots + \vartheta_k \underline{x}^k$ = combinazione lineare di $\underline{x}^1, \underline{x}^2, \dots, \underline{x}^k$ con coefficienti $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_k$

Se $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_k \geq 0$ e $\sum_{i=1}^{k} \vartheta_i = 1$, allora, $\vartheta_1 \underline{x}^1 + \vartheta_2 \underline{x}^2 + \dots + \vartheta_k \underline{x}^k$ è una combinazione lineare convessa

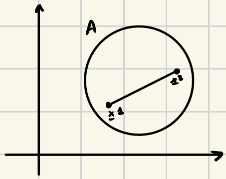
Esempio $\underline{x}^1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}; \underline{x}^2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}; \underline{x}^3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$

$\vartheta_1 = \frac{1}{2}; \vartheta_2 = \frac{1}{4}; \vartheta_3 = \frac{1}{4}$

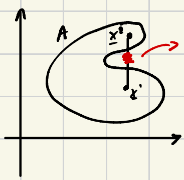
$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

INSIEMI CONVESSI

in $\mathbb{R}^2$



È convesso se tutti i punti legati da un segmento, esso è interno all'insieme



Non è convesso

Non posso usare il linguaggio della geom. in $\mathbb{R}^n$
↓
ling. algebrico
↓
COMBINAZIONE CONVESSA

$t\underline{x}^1 + (1-t)\,\underline{x}^2$ $\quad (0 \leq t \leq 1)$

$t=1 \quad \underline{x}^1$

$t=0 \quad \underline{x}^2$

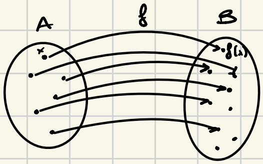
$t=\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2}\underline{x}^1 + \frac{1}{2}\underline{x}^2$ → PUNTO MEDIO DEL SEGMENTO $\overline{\underline{x}^1 \underline{x}^2}$

Def $A \subseteq \mathbb{R}^m$ è convesso quando $\forall \underline{x}^1, \underline{x}^2 \in A$, risulta $t\underline{x}^1 + (1-t)\underline{x}^2 \in A$, $\forall t \in [0,1]$

FUNZIONI

Def A, B

Una funzione da A in B è una legge (o corrispondenza) che ad ogni elemento di A associa uno e un solo elemento di B.



$f: A \to B$

Esempio A = insieme dei poligoni ; $B = \mathbb{R}$

poligono $\to$ area $f: A \to B$

A = insieme dei cittadini ; B = sequenze di 16 numeri o lettere

cittadino $\to$ CF

N.B. $f: A \to B$ è iniettiva quando $x^1, x^2 \in A$ con $x^1 \neq x^2 \Rightarrow f(x^1) \neq f(x^2)$

Funzioni $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Esempio 1) $f(x) = x^3$

2) $f(x) = \log x = \ln x$

$A = (0; +\infty)$ $B = \mathbb{R}$

Immagine di f

$\operatorname{Im} f = f(A) = \{ y \in \mathbb{R} : y = f(x) \text{ per qualche } x \in A \}$

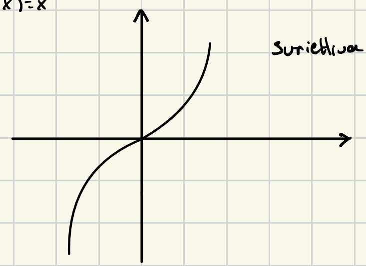
Esempio

$f(x) = x^2$

$\text{Imm } f = [0; +\infty)$

N.B. $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è suriettiva se $f(A) = \mathbb{R}$

$f(x) = x^3$



Suriettiva

N.B. $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è biettiva quando è sia suriettiva che iniettiva

Proprietà di $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

1) funzioni limitate

Def $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è limitata sup. (inf) quando $\exists M \in \mathbb{R} : f(x) \leq M ; \forall x \in A$

$(\exists m \in \mathbb{R} : f(x) \geq m ; \forall x \in A)$

Se una funzione è lim sia sup che inf $\to$ LIMITATA

Esempio $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

$f(x) \geq 0, \forall x \Rightarrow f$ è lim inf

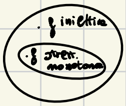
$\frac{1}{1+x^2} \leq 1, \forall x \Rightarrow f$ è limitata superiormente

2) Funzioni Monotone

Def $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è monotona crescente (decrescente) quando $\forall\, x_1, x_2 \in A$ con $x_2 > x_1$, risulta $f(x_2) \geq (\leq)\, f(x_1)$

Def $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è strettamente monotona crescente (decrescente) quando $\forall\, x_1, x_2 \in A$ con $x_2 > x_1$, risulta $f(x_2) > (<)\, f(x_1)$

1) Se $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è crescente (o decrescente) allora è iniettiva F
strettamente



Massimi e minimi per $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

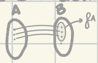
Def. $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A$ si dice punto di minimo (massimo) globale/assoluto quando risulta $f(x) \geq (\leq)\, f(x_0)$, $\forall x \in A$

argmax f = insieme dei punti di massimo assoluto di f
(argmin f) (minimo)

17-09-2024

Teorema Una funzione monotona é invertibile se e solo se é strettamente monotona.

iniettiva $\iff$ invertibile   Una funzione iniettiva é invertibile nel suo dominio



Dim   Hp $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é monotona $\underbrace{\text{crescente}}_{\text{per convenzione}}$,

1) Dimostriamo che f strettamente monotona $\implies f$ invertibile

Se $x_1, x_2 \in A$, con $x_2 > x_1$, risulta $f(x_2) > f(x_1)$

Quindi f é invertibile.

2) Dimostriamo che f é invertibile $\implies f$ strettamente monotona.

$x_1, x_2 \in A$ con $x_1 \neq x_2$

In particolare con $x_2 > x_1$

Siccome f é monotona crescente, risulta $f(x_2) \geq f(x_1)$.

Siccome f é invertibile, non può essere $f(x_2) = f(x_1)$. Quindi

$$f(x_2) > f(x_1)$$

ossia f é strett. monotona crescente

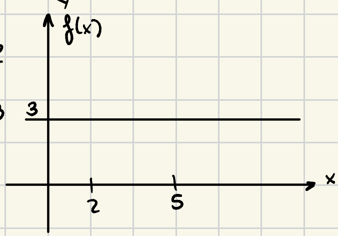
---

f crescente

$$x \geq y \implies f(x) \geq f(y)$$
$$\not\Leftarrow$$

Esempio

$f(x) = 3$



$$f(2) = f(5)$$

ma $2 < 5$

TEOREMA: La stretta monotonia equivale ad un isomorfismo d'ordine

Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

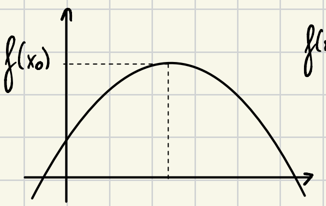
1) $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è strettamente crescente;

2) $x \geq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$

Max e min per $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

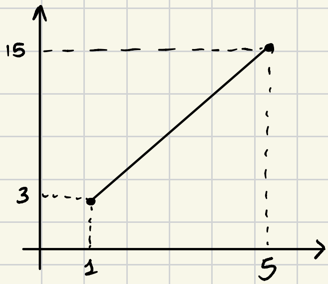
<u>Def</u>. $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. $x_0 \in A$ si dice punto di max globale (o assoluto) per f, quando risulta

$$f(x_0) \geq f(x), \ \forall x \in A$$



$f(x_0)$ = massimo di f.

<u>Esempio</u> $f(x) = 3x$, $x \in [1,5] = A$

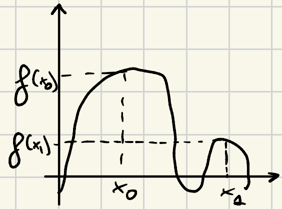


$\text{Argmax } f = \{5\}$; $\text{argmin} f = \{1\}$

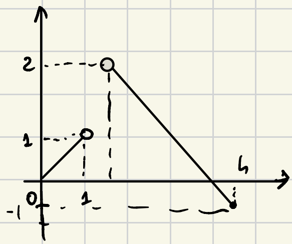
$$f(A) = [\underbrace{3}_{\min f}; \underbrace{5}_{\max f}]$$

Def $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x_0 \in A$ è punto di max locale (o relativo)
quando $\exists U(x_0)$ tale che
$$f(x_0) \geq f(x), \ \forall x \ U(x_0) \cap A$$



Esempio $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1 \\ -x+3, & 1 < x \leq 4 \end{cases}$



4 = punto di min globale
4, 0 = punto di min locale
$\nexists$ punti di max globale / locale

$$f(A) = [-1; 2)$$

N.B. $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$f(A) \subseteq \mathbb{R}$

($:=$ uguale per definizione)

$\max f := \max f(A)$
$\min f := \min f(A)$
$\sup f := \sup f(A)$
$\inf f := \inf (A)$

Conservazione dei massimi e dei minimi rispetto alla composizione strett. crescente

Teorema $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $g: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ strettamente crescente. Supponiamo di poter considerare la funzione composta $g(f(a))$.

Allora $\operatorname{argmax} f = \operatorname{argmax} g(f)$

Esempio

$f(x) = x^2+1$ Trovare i punti di minimo assoluto di $h(x)$.

$h(x) = e^{x^2+1}$

$\downarrow$

$g(x) = e^x$

$h(x) = g(f(x)) = e^{x^2+1}$: $\arg\min f = \arg\min h = \{0\}$

Dim 1) $\operatorname{Argmax} f \leq \operatorname{argmax} g(f)$

$x_0 \in \operatorname{argmax} f \Longleftrightarrow f(x_0) \geq f(x), \forall x \in A$

$$f(x_0) \geq f(x) \Longleftrightarrow \begin{cases} f(x_0) = f(x) & \text{oppure} \\ f(x_0) > f(x) \end{cases}$$

$\left[\begin{array}{l} \text{Se } f(x_0) = f(x) \Rightarrow g(f(x_0)) = g(f(x)) \\ \text{Se } f(x_0) > f(x) \Rightarrow g(f(x_0)) > g(f(x)) \end{array}\right.$, siccome g è strettamente crescente.

Quindi $f(x_0) \geq f(x) \Rightarrow g(f(x_0)) \geq g(f(x)) \Rightarrow x_0 \in \operatorname{argmax} g(f)$

2) $\operatorname{argmax} g(f) \leq \operatorname{argmax} f$

$x_0 \in \operatorname{argmax} g(f)$

$\Longleftrightarrow$

$g(f(x_0)) \geq g(f(x)), \forall x \in A$

Dobbiamo mostrare che $f(x_0) \geq f(x)$, $\forall x \in A$

Per assurdo, suppongo $f(x_0) < f(x)$. Quindi $\boxed{g(f(x_0)) < g(f(x))}$, siccome g è strettamente crescente.

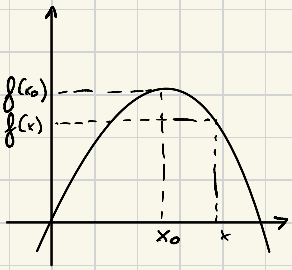
Una contraddizione!

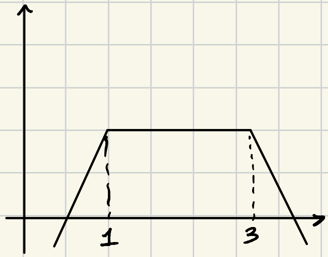
PUNTI DI MAX e MIN FORTE

<u>Def</u>. $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

i) $x_0 \in A$ è punto di max (min) globale forte quando

$$f(x_0) \underset{(<)}{>} f(x), \ \forall x \in A, \ x \neq x_0$$





ii) $x_0 \in A$ è punto di max (min) locale forte, quando $\exists\, U(x_0)$ tale che

$$f(x_0) \underset{(<)}{>} f(x), \ \forall x \in U(x_0) \cap A, \ x \neq x_0$$

<u>Esempio</u> $f(x) = \operatorname{sen} x$

Teorema Se x_0 è punto di massimo globale per f esso è forte se e solo se è <u>UNICO</u>

18-09-2024 Esercitazione

Def: Siano $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^m$. $\underline{x}$ e $\underline{y}$ sono ortogonali se $\underline{x} \cdot \underline{y} = 0$

Def: Un vettore $\underline{x} \in \mathbb{R}^m$ tale che $\|\underline{x}\| = 1$ si dice vettore unitario o versore.

Def: Un insieme $\{\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_k\} \subseteq \mathbb{R}^m$ è un insieme ortonormale se $\|\underline{x}_i\| = 1 \quad \forall i = 1, \dots, k$ e $\underline{x}_i \cdot \underline{x}_j = 0 \quad \forall i,j = 1, \dots, k$ con $i \neq j$

Esempi:

(1) $\underline{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}; \underline{x}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^3$

$\|\underline{x}_1\| = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{3} \neq 1 \Rightarrow$ non è un versore

$\|\underline{x}_2\| = \left\| \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2} \neq 1 \Rightarrow$ non è un versore

---

$\underline{x}_1 \cdot \underline{x}_2 = 1(-1) + (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 0 = -1 - 1 = -2 \neq 0 \Rightarrow \underline{x}_1$ e $\underline{x}$ non sono ortogonali

(2) $\underline{x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \underline{y} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

$\|\underline{x}\| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = 1 \Rightarrow$ è un versore

$\|\underline{y}\| = \sqrt{\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = 1 \Rightarrow$ è un versore

$\underline{x} \cdot \underline{y} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow \{\underline{x}; \underline{y}\}$ sono un insieme ortonormale

Teorema di Pitagora

$\forall \underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^m$ ortogonali si ha che $\|\underline{x}\|^2 + \|\underline{y}\|^2 = \|\underline{x}+\underline{y}\|^2$

Ordinamento in $\mathbb{R}^m$:

Def: $\forall \underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^m$

$$\underline{x} \geq \underline{y} \iff x_i \geq y_i, \quad \forall i = 1, \dots, m$$

Proprietà

$\underline{x} \geq \underline{x} \quad \forall \underline{x} \in \mathbb{R}^m$ proprietà riflessiva

se $\underline{x} \geq \underline{y}$ e $\underline{y} \geq \underline{x} \Rightarrow \underline{y} = \underline{x}$ // antisimmetrica

se $\underline{x} \geq \underline{y}$ e $\underline{y} \geq \underline{z} \Rightarrow \underline{x} \geq \underline{z}$ // transitiva

Oss: Se $n \geq 2$, l'ordinamento non è totale, cioè non è vero che $\forall \underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^m$ si ha sempre $\underline{x} \geq \underline{y}$ oppure $\underline{y} \geq \underline{x}$

Esempio

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \underline{y} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

non possono essere ordinati

Def: Siano $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^m$

$$\underline{x} > \underline{y} \iff x_i \geq y_i \quad \forall i = 1, \dots m$$

per almeno un j

$$x_j > y_j$$

$\underline{x}$ si dice strettamente maggiore di $\underline{y}$

$$\underline{x} \gg \underline{y} \iff x_i > y_i \quad \forall i = 1, \dots, m$$

$\underline{x}$ è fortemente maggiore di $\underline{y}$

$$\gg \;\Rightarrow\; > \;\Rightarrow\; \geq$$

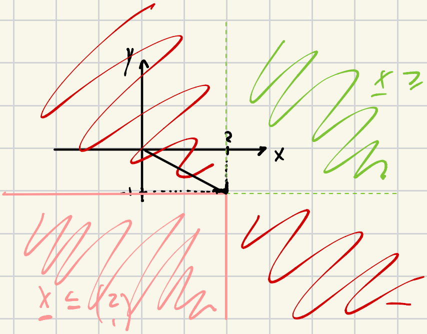
Esempi:

(1) $\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} > \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

Esempio:

$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$



non confrontabili

Se $\underline{x} \geq \underline{0}$ $\quad$ $\underline{x}$ é positivo

Se $\underline{x} > \underline{0}$ $\quad$ $\underline{x}$ é strettamente positivo

Se $\underline{x} \gg \underline{0}$ $\quad$ $\underline{x}$ é fortemente positivo

OSS: $\underline{x} = \underline{0} \geq \underline{0}$

$\Rightarrow$ é positivo

Esempi:

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ é strettamente positivo

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ é fortemente positivo

20-09-2024

Funzioni di n variabili

$f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x)$

Esempio $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$

$f(1;2) = 1 + 4 = 5$

Che cos'è una funzione di n variabili? È una corrispondenza f con dominio in $\mathbb{R}^n$

$\underbrace{f(x_1, x_2, \dots, x_n)}_{\text{vettore di } \mathbb{R}^n} = f(\underline{x})$; $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

adesso è un vettore

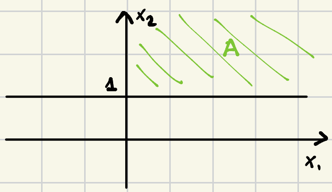
$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

Dominio di $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Esempio

$f(\underbrace{x_1, x_2}) = 10\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2 - 1}$

$A = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} : x_1 \geq 0 ; x_2 - 1 \geq 0 \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} : x_1 \geq 0 ; x_2 \geq 1 \right\}$

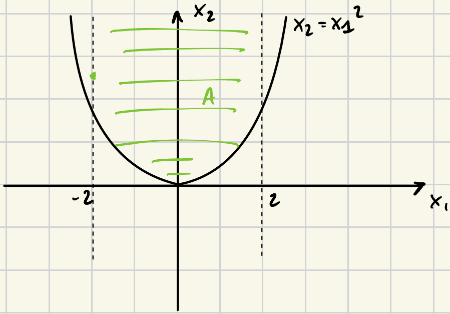


A è chiuso, non limitato, convesso

Esempio

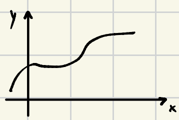
$f(x_1, x_2) = \sqrt{x_2 - x_1^2} + \log(4 - x_1^4)$

$$A = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} : x_2 - x_1^2 \geq 0,\ 4 - x_1^2 > 0 \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} : x_2 \geq x_1^2 ;\ \underbrace{x_1^2 < 4}_{\Updownarrow\ -2 < x_1 < 2} \right\}$$



A non è chiuso, non è limitato, convesso

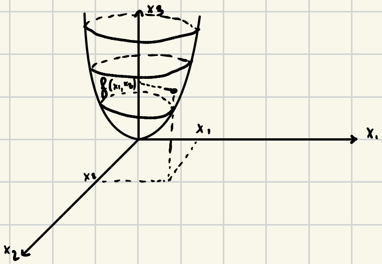
$f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



$$Grf = \{ \underbrace{(x, f(x))}_{\in \mathbb{R}^2} ; x \in A \} \subseteq \mathbb{R}^2$$

$f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$Grf = \{ \underbrace{(\underline{x}, f(\underline{x}))}_{\in \mathbb{R}^{n+1}} ; \underline{x} \in A \subseteq \mathbb{R}^n \} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$$



Def

$f: A \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$. Un punto $\underline{x}^0 \in A$
è punto di massimo (minimo) globale/assoluto per f, quando

$$f(\underline{x}^0) \overset{(\le)}{\ge} f(\underline{x}), \forall \underline{x} \in A$$

Esempio

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$$

$(0;0)$ è punto di min o max assoluto?

$f(2;1) = 3 > f(0;0) \Rightarrow (0;0)$ non è punto di max assoluto

$f(1;2) = -3 < f(0;0) \Rightarrow (0;0)$ non è punto di min assoluto

Def: $f: A \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$
$\underline{x}^0 \in A$ è punto di max (o min) locale/relativo per f quando $\exists\, U(\underline{x}^0)$ tale che

$$f(\underline{x}^0) \overset{(\le)}{\ge} f(\underline{x}), \forall \underline{x} \in U(\underline{x}^0) \cap A$$

FUNZIONI CONVESSE e CONCAVE

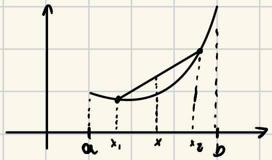
Def. $A \subseteq \mathbb{R}^m$ è convesso quando
$\forall \underline{x}^1, \underline{x}^2 \in A$ risulta

$$t\, \underline{x}^1 + (1-t)\underline{x}^2 \in A, \quad \forall t \in [0;1]$$

$A \subseteq \mathbb{R}$ gli unici insieme convessi di $\mathbb{R}$ sono gli intervalli

$f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

A convesso $\iff$ intervallo



ha la pancia verso sotto

$\forall x \in [x_1, x_2],\ f(x) \leq r(x)$

$x = t\,x_1 + (1-t)\,x_2,\ t \in [0;1]$.

NB. $r(x) = t\,f(x_1) + (1-t)\,f(x_2)$

$\forall t \in [0;1],\ f(t\,x_1 + (1-t)\,x_2) \leq t\,f(x_1) + (1-t)\,f(x_2)$

Def. $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ è convessa quando
$\forall\, x_1, x_2 \in [a, b],\ \forall\, t \in [0, 1]$ risulta $f(t x_1 + (1-t) x_2) \leq t f(x_1) + (1-t) f(x_2)$

Anche se una funzione ha dei segmenti può essere concava/convesse

La retta è una funzione sia concava che convessa

Strett concave/convesse = senza = (solo $<$/$>$)

Def. $f: A \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, A convesso è convessa (concava) quando
$\forall\ \underline{x}^1, \underline{x}^2 \in A,\ \forall\, t \in [0, 1]$ risulta
$f(t\,\underline{x}^1 + (1-t)\,\underline{x}^2) \leq t\,f(\underline{x}^1) + (1-t)\,f(\underline{x}^2)$

Teorema di Fenchel (H)

Sia $f: A \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ una funzione convessa (concava). Se $\underline{x}^\circ \in A$ è punto di minimo (massimo) locale per f, allora è anche punto di min (max) globale per f.

Funzioni quasi-convesse e quasi-concave

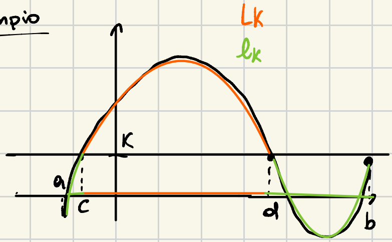
$f: A \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$

$L_K = \{\underline{x} \in A : f(\underline{x}) \geq K\}$ Insieme di sopralivello

$\downarrow$
insieme

$\ell_K = \{\underline{x} \in A : f(\underline{x}) \leq K\}$ Insieme di sottolivello

Esempio



Esempio

$U(\text{pane}; \text{acqua})$

$(0;1)\ ;\ (1;0)$

$U(0;1) \geq U(1;0)$

$t(0;1) + (1-t)(1;0),\ t \in [0;1]$

$t = \frac{1}{2}\ ;\ \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$

$t(0;1) + (1-t)(1;0) = (1-t; t)$

$L_K = \{(p;a) : U(p;a) \geq K\}$

$(1;0) \in L_K$

$(0;1) \in L_K$

per $t \in [0;1]$

$t(0;1) + (1-t)(1;0) \in L_K$

L_K è convesso

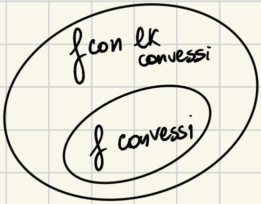
Teorema

$f : A \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, A convesso

Se f è convessa gli insiemi

L_K sono convessi $\forall K \in \mathbb{R}$

Se f è concava gli insiemi L_K sono convessi $\forall x \in \mathbb{R}$



24-09-2024

Def. $f : A \subseteq \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$, A convesso, si dice convessa (concava) quando $\forall\, \underline{x}^1, \underline{x}^2 \in A$, $\forall t \in [0;1]$ risulta

$$f(t\underline{x}^1 + (1-t)\,\underline{x}^2) \overset{(\geq)}{\leq} t\, f(\underline{x}^1) + (1-t)\, f(\underline{x}^2)$$

TEOREMA DI FENCHEL

Se $f : A \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, A convesso, è convessa (concava), allora se $\underline{x}^0 \in A$ è punto di min(max) locale, è anche punto di min (max) globale.

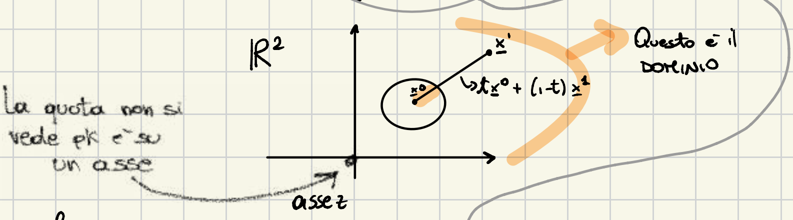
DIMOSTRAZIONI x LE CONVESSE (sul libro stanno le concave)

Hp f convessa, $\underline{x}^0 \in A$ è punto di min locale.

Per assurdo, supponiamo che $\underline{x}^0$ non sia punto di minimo globale

Siccome $\underline{x}^0$ è punto di min. locale, $\exists\, U_\varepsilon(\underline{x}^0)$ tale che $f(\underline{x}^0) \leq f(\underline{x})$ $\forall \underline{x} \in U_\varepsilon(\underline{x}^0) \cap A$.

Se $\underline{x}^0$ non è punto di min globale $\exists\, \underline{x}^1 \in A$ tale che $f(\underline{x}^1) < f(\underline{x}^0)$



Considero

$$f(t\underline{x}^0 + (1-t)\underline{x}^1) \underset{\substack{\downarrow \\ f \text{ è convessa}}}{\leq} t f(\underline{x}^0) + \underbrace{(1-t)\, f(\underline{x}^1)}_{<(1-t) f(\underline{x}^0)}, \quad \forall t \in [0;1]$$

$$\Leftrightarrow f(t\underline{x}^0 + (1-t)\underline{x}^1) < (1-t) f(\underline{x}^0)$$

$$\cancel{t f(\underline{x}^0)} + f(\underline{x}^0) - \cancel{t f(\underline{x}^0)}$$

$$\Leftrightarrow f(t\underline{x}^0 + (1-t)\underline{x}^1) < t f(\underline{x}^0) + (1-t) f(\underline{x}^0) \qquad f(\underline{x}^0)$$

Quindi, $\forall t \in [0;1]$ si ha:

$$f(t\underline{x}^0 + (1-t)\underline{x}^1) < f(\underline{x}^0)$$

Va a contraddire l'ipotesi in cui $\underline{x}^0$ è un punto di min locale

In particolare, si ha:

$$\|(t\underline{x}^0 + (1-t)\underline{x}^1) - \underline{x}^0\| = \|(1-t)(\underline{x}^1 - \underline{x}^0)\| = (1-t)\|\underline{x}^1 - \underline{x}^0\| < \varepsilon$$

omogeneità

$1-t \geq 0 \Longrightarrow$ può uscire dalla norma

$$(1-t)\|\underline{x}^1 - \underline{x}^0\| < \varepsilon$$

per $1-t < \dfrac{\varepsilon}{\|\underline{x}^1 - \underline{x}^0\|}$, $t > 1 - \dfrac{\varepsilon}{\|\underline{x}^1 - \underline{x}^0\|}$

$\Downarrow$

i punti sono dentro l'intorno $U_\varepsilon(\underline{x}^0)$

Quindi anche $\underline{x}^1$ appartiene all'intervallo $U_\varepsilon(\underline{x}^0)$ dei punti minimi locali. $\lightning$

Per $t > 1 - \dfrac{\varepsilon}{\|\underline{x}^1 - \underline{x}^0\|}$ risulta

$$t\underline{x}^0 + (1-t)\underline{x}^1 \in U_\varepsilon(\underline{x}^0)$$

e $f(t\underline{x}^0 + (1-t)\underline{x}^1) < f(\underline{x}^0)$

$\hookrightarrow$ assurdo perché non considera $\underline{x}^0$ punto di min locale

Ne consegue necessariamente che $\underline{x}^0 \in U_\varepsilon(\underline{x}^0)$ è punto di minimo globale

$f: A \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$

$L_K = \{\underline{x} \in A : f(\underline{x}) \geq K\}$

$\ell_K = \{\underline{x} \in A : f(\underline{x}) \leq K\}$

TEOREMA

Se $f: A \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, A convesso, è convessa (concava), allora gli insiemi ℓ_K (L_K) sono convessi $\forall K \in \mathbb{R}$

Dim (per le convesse)

Hp f convessa

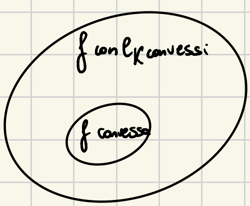
Devo dimostrare che se $\underline{x}^1, \underline{x}^2 \in \ell_K$ allora $\forall t \in [0;1]$ si ha $t\,\underline{x}^1 + (1-t)\underline{x}^2 \in \ell_K$.

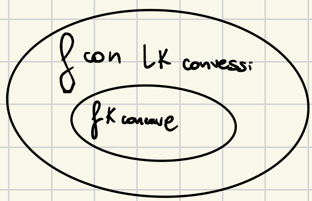
$\underline{x}^1 \in \ell_K \Leftrightarrow f(\underline{x}^1) \leq K$

$\underline{x}^2 \in \ell_K \Leftrightarrow f(\underline{x}^2) \leq K$

$\forall t \in [0;1]$ si ha $f(t\underline{x}^1 + (1-t)\underline{x}^2) \underset{\text{per } f \text{ conv}}{\leq} t f(\underline{x}^1) + (1-t) f(\underline{x}^2) \leq \underbrace{tK + (1-t)K}_{\cancel{tK} + K - \cancel{tK} = K}$

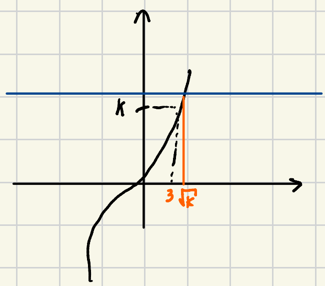
ossia $t\,\underline{x}^1 + (1-t)\underline{x}^2 \in \ell_K$





Esempio:

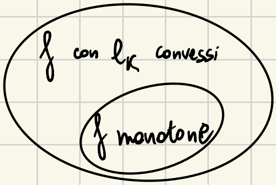
$f(x) = x^3$



$\ell_K = (-\infty, \sqrt[3]{K})$

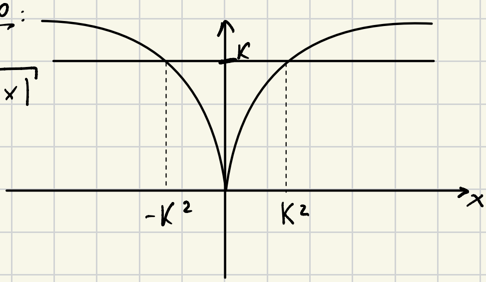
perchè sono quasi-affini → vedi lezione con Andreano

N.B. Se $f:[a;b] \to \mathbb{R}$ è monotona, allora ℓ_K e L_K sono convessi



Esempio:

$f(x) = \sqrt{|x|}$



$\ell_K = [-K^2 ; K^2]$ convesso

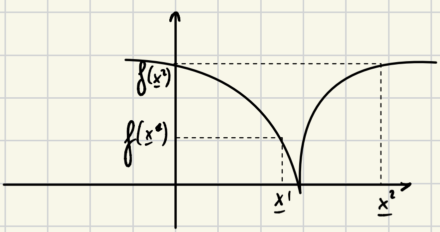
Funzioni QUASI-CONVESSE E QUASI-CONCAVE (B. De Finetti ≃ 1950)

Def $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, A convesso

i) f è quasi-convessa quando $\forall t \in [0;1]$ e $\forall \underline{x}^1, \underline{x}^2 \in A$ risulta

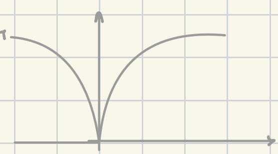
$$f(t\underline{x}^1 + (1-t)\underline{x}^2) \leq \max\{f(\underline{x}^1) ; f(\underline{x}^2)\}$$

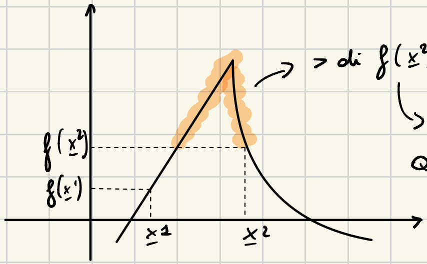
ii) quasi-concava: $f(t\underline{x}^1 + (1-t)\underline{x}^2) \geq \min\{f(\underline{x}^1); f(\underline{x}^2)\}$



$$f(t\underline{x}^1 + (1-t)\underline{x}^2) \leq \max\{f(\underline{x}^1); f(\underline{x}^2)\} = f(\underline{x}^2)$$

ex $f(x) = \sqrt{|x|}$





> di $f(x^2)$

NON è QUASI - CONVESSA

CONCAVA credo intendess

$$\cancel{f(t\underline{x}^1 + (1-t)\underline{x}^2) \le f(\underline{x}^2)}$$

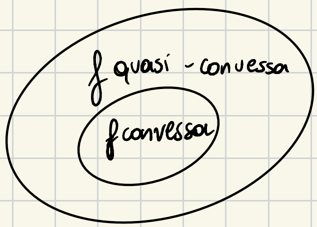
Teorema

$f: A \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, A convesso è quasi-convessa (quasi-concava) se e solo se $\forall K \in \mathbb{R}$ ℓ_K (L_K) è convesso.

Teorema (H)

Se $f: A \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ è convessa, allora è anche quasi-convessa.

Dim f convessa $\Rightarrow \ell_K$ convesso $\forall K \in \mathbb{R} \Rightarrow f$ quasi-convessa



Le proprietà di convessità e concavità si mantiene attraverso la composizione con determinate classi di funzione

TEOREMA

Siano $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali da poter considerare la funzione composta $g(f)$.

i) Se g è crescente e convessa (concava) e f è convessa (concava), allora $g(f)$ è convessa (concava).

ii) Se f è quasi convessa (concava) e g è crescente, allora $g(f)$ è quasi convessa (concava)

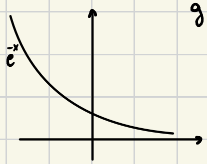
Fare l'esempio in cui due funzioni convesse se composte non è convessa

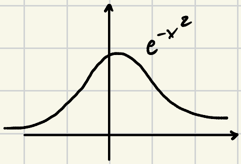
Esempio

$f(x) = x^2$ convessa

$g(x) = e^{-x}$ convessa (ma decrescente)

$g(f(x)) = e^{-x^2}$





NON è convessa

Teorema di Fenchel

Le funzioni concave (convesse) sono quasi-concave (quasi-convesse).

Dim (Caso f concava)

Supponiamo che $f: A \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, A convesso sia una funzione concava e mostriamo che f è quasi-concava.

Siccome f è concava si ha:

$$f(t\underline{x}^1+(1-t)\underline{x}^2) \geq t f(\underline{x}^1)+(1-t) f(\underline{x}^2), \quad \forall t \in [0;1], \quad \forall \underline{x}^1; \underline{x}^2 \in A.$$

Si ha $f(\underline{x}^1) \geq \min\{f(\underline{x}^1), f(\underline{x}^2)\}$ e $f(\underline{x}^2) \geq \min\{f(\underline{x}^1); f(\underline{x}^2)\}$

Pertanto:

$$f(t\underline{x}^1+(1-t)\underline{x}^2) \geq t f(\underline{x}^1) + (1-t) f(\underline{x}^2) \geq t \min\{f(\underline{x}^1), f(\underline{x}^2)\} + (1-t) \min\{f(\underline{x}^1), f(\underline{x}^2)\} \geq \min\{f(\underline{x}^1); f(\underline{x}^2)\}.$$

Quindi f è quasi-concava. $\square$

(Caso f convessa)

Dim

Supponiamo che $f: A \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, A convesso, sia una funzione convessa e mostriamo che f è quasi-convessa.

Siccome f è convessa si ha:

$$f(t\underline{x}^1+(1-t)\underline{x}^2) \leq t f(\underline{x}^1)+(1-t) f(\underline{x}^2), \quad \forall t \in [0;1], \quad \forall \underline{x}^1; \underline{x}^2 \in A.$$

Si ha $f(\underline{x}^1) \leq \max\{f(\underline{x}^1), f(\underline{x}^2)\}$ e $f(\underline{x}^2) \leq \max\{f(\underline{x}^1); f(\underline{x}^2)\}$

Pertanto:

$$f(t\underline{x}^1+(1-t)\underline{x}^2) \leq t f(\underline{x}^1) + (1-t) f(\underline{x}^2) \leq \max\{f(\underline{x}^1); f(\underline{x}^2)\}$$

Quindi f è quasi-convessa $\square$

LE SUCCESSIONI

Che cos'è una successione?

Def Una successione è una funzione

$$f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$

$n \in \mathbb{N}$; $f(n) \to$ non si usa

ma

$a_n, b_n, \ldots$

Esempio $a_n = \dfrac{n}{n+1}$

$a_0 = 0$

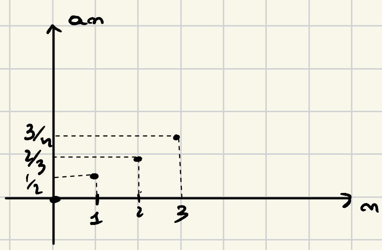
$a_1 = \frac{1}{2}$

$a_2 = \frac{2}{3}$

$\vdots$

La successione non è altro che una SERIE DI NUMERI

GRAFICO DI UNA SUCCESSIONE



Def Una successione a_n è monotona crescente (decrescente) quando $a_{n+1} \geq a_n$ ($a_{n+1} \leq a_n$), $\forall n \in \mathbb{N}$

Esempio $a_n = \dfrac{n}{n+1}$; $a_{n+1} = \dfrac{n+1}{n+2}$

$a_{n+1} \geq a_n$; $\dfrac{n+1}{n+2} \geq \dfrac{n}{n+1}$; $\dfrac{n+1}{n+2} - \dfrac{n}{n+1} \geq 0$; $\dfrac{(n+1)^2 - n(n+2)}{(n+1)(n+2)} \geq 0$; $\dfrac{\cancel{n^2} + 1 + \cancel{2n} - \cancel{n^2} - \cancel{2n}}{(n+1)(n+2)} \geq 0$; $\dfrac{1}{(n+1)(n+2)} \geq 0$

Quindi dire che

$$\frac{n+1}{n+2} \geq \frac{n}{n+1}$$

equivale a dire che $\frac{1}{(n+1)(n+2)} \geq 0$

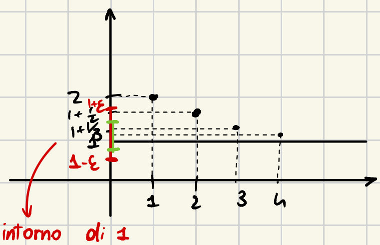
$a < a_n \Rightarrow a_n$ limitata inf.

$\frac{n}{n+1} \leq 1 \Rightarrow a_n$ limitata sup.

Non esistono successioni concave e convesse

Limiti di successioni

Esempio $a_n: 1 + \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}, n \neq 0$



Def Si dice che una successione a_n soddisfa definitivamente una proprietà P, quando $\exists \bar{n} \in \mathbb{N}$ tale a_n soddisfa P per $n \geq \bar{n}$

Esempio $a_n = \begin{cases} -n^2, & n \leq 100 \\ n^2, & n \geq \underset{\bar{n}}{101} \end{cases}$

Funzioni Affine

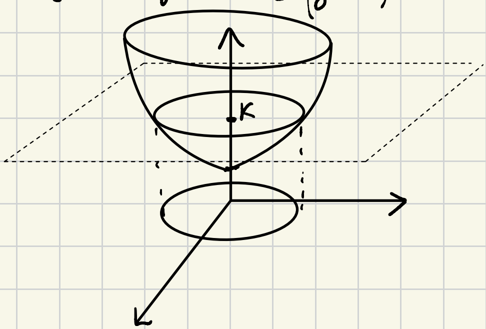
Def: Una funzione $f: C \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, con C convesso, si dice affine se è sia concava che convessa, cioè se $\forall\, \underline{x}^1, \underline{x}^2 \in C$ e $\forall\, \alpha \in [0;1]$

$$f(\alpha \underline{x}^1 + (1-\alpha)\underline{x}^2) = \alpha f(\underline{x}^1) + (1-\alpha) f(\underline{x}^2)$$

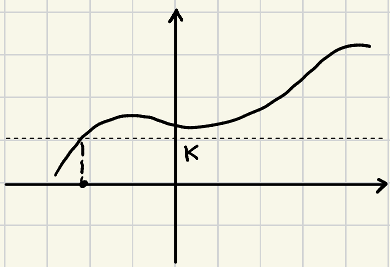
Oss: Se $f: C \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, C convesso
f è affine $\Leftrightarrow$ $f(x) = mx + q$

Curve di livello

Def Sia $f: A \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ e sia $K \in \mathbb{R}$, con $f^{-1}(K) \neq \emptyset$ la curva di livello K di f è $\{\underline{x} \in A : f(\underline{x}) = K\} = (f = K)$



$f(x;y) = x^2 + y^2$
$K = -1 \quad f^{-1}(-1) = \emptyset$



Funzione di utilità

$U: \mathbb{R}^m_+ \longrightarrow \mathbb{R}$
$\underline{x} \longrightarrow U(\underline{x})$

panieri di beni di consumo

U rappresenta le preferenze del consumatore

$(U = K)$ è l'insieme dei panieri di utilità K.

Curve di livello = curve di indifferenza

FUNZIONE DI COBB-DOUGLAS

$$U(\underline{x}) = \prod_{i=1}^{m} x_i^{\alpha_i} = x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot x_m^{\alpha_m}$$

modo compatto per scrivere il prodotto

dove $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_m)$ e $\alpha_i > 0 \ \forall i = 1, \ldots, m$ $\quad \sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1$

In particolare:

$U(x; y) = \sqrt{xy}$

Se $K > 0$

$$(U = K) = (\sqrt{xy} = K) = (xy = K^2) = \left(y = \frac{K^2}{x}\right)$$

Oss:

Due curve di livello K_1 e K_2, $K_1 \neq K_2$, hanno sempre intersezione vuota

$$\underset{\text{SOPRALIVELLO}}{(f \geq K)} \cap \underset{\text{SOTTOLIVELLO}}{(f \leq K)} = (f = K)$$

Def: Sia $f : C \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, C convesso, una funzione quasi-concava e quasi convessa $\Rightarrow$ f si dice quasi-affine, cioè

$$\min\{f(\underline{x}^1); f(\underline{x}^2)\} \leq f(\alpha \underline{x}^1 + (1-\alpha)\, \underline{x}_2) \leq \max\{f(\underline{x}^1); f(\underline{x}^2)\}$$

$$\forall\, \underline{x}^1, \underline{x}^2 \in C \ ; \ \forall \alpha \in [0;1]$$

Esempio

Se $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I intervallo, è monotona $\Rightarrow$ f è quasi-affine

Infatti:

Supponiamo che f sia crescente, allora

$$\text{se} \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

$$x_1 \leq \alpha x_1 + (1-\alpha) x_2 \leq x_2 \qquad \forall \alpha \in [0;1]$$

$$\Rightarrow \underbrace{f(x_1)}_{\min\{f(x_1);\, f(x_2)\}} \leq f(\alpha x_1 + (1-\alpha)\, x_2) \leq \underbrace{f(x_2)}_{\max\{f(x_1);\, f(x_2)\}}$$

$\Rightarrow$ f è quasi-affine.

Esempio

$f(x) = x^3$ è quasi-affine

Se f è affine $\Rightarrow$ f è quasi-affine

SUCCESSIONI

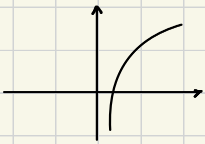
$$\lim_{n \to +\infty} a_n = L \in \overline{\mathbb{R}}$$

$$\lim_{n \to +\infty} n^\alpha = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha > 0 \\ 1 & \text{se } \alpha = 0 \\ 0 & \text{se } \alpha < 0 \end{cases}$$

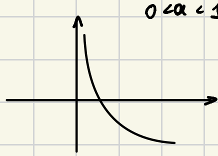
$$\lim_{n \to +\infty} q^n = \begin{cases} +\infty & \text{se } q > 1 \\ 1 & \text{se } q = 1 \\ 0 & \text{se } |q| < 1 \\ \nexists & \text{se } q \leq -1 \end{cases}$$

$$\lim_{n \to +\infty} \log_a n = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 1 \\ -\infty & \text{se } 0 < a < 1 \end{cases}$$

$a > 1$



$0 < a < 1$



27-09-2024

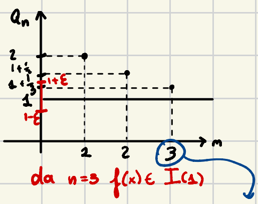
Successioni:

$f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

a_n

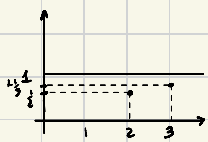
DEFINITIVAMENTE $\to$ p soddisfatta per n abbastanza grande

① $a_m = 1 + \frac{1}{m}, \ m \in \mathbb{N}, \ m \neq 0$



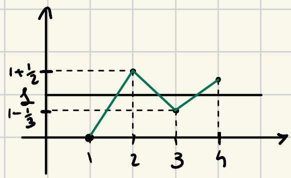
$\lim a_m = 1$

② $a_m = 1 - \frac{1}{m}, \ m \in \mathbb{N}, \ m \neq 0$



$\lim a_m = 1$

③ $a_m = 1 + (-1)^m \cdot \frac{1}{m}, \ m \in \mathbb{N}, \ m \neq 0$



$\lim a_m = 1$

Il concetto di VICINO è legato a quello di INTORNO

Successione convergente

Def Si dice a_m converge a $\ell \in \mathbb{R}$ quando $\forall \varepsilon > 0$ si ha

$$\ell - \varepsilon < a_m < \ell + \varepsilon \quad \text{definitivamente}$$

Ossia a_m converge a $\ell \in \mathbb{R}$ quando $\forall \varepsilon > 0$ $\underbrace{\exists \bar{m} \in \mathbb{N},}$ tale che $\ell - \varepsilon < a_m < \ell + \varepsilon, \underbrace{\forall m \geq \bar{m}}$

esplicito "definitivamente"

Equivalentemente, a_m converge a $\ell \in \mathbb{R}$ quando $\forall U(\ell)$ $\exists \bar{m} \in \mathbb{N}$ tale che $a_m \in U(\ell)$, $\forall m \geq \bar{m}$

Esempio $\ell = 1$; $a_m = 1 + \frac{1}{m}$

Abbiamo verificato la definizione

$\boxed{1 - \varepsilon < 1 + \frac{1}{m} < 1 + \varepsilon}$, $\cancel{1} + \frac{1}{m} < \cancel{1} + \varepsilon$

sempre vera

$\frac{1}{m} < \varepsilon$; $\boxed{m > \frac{1}{\varepsilon}} = \bar{m}$

Per indicare che a_n converge a ℓ

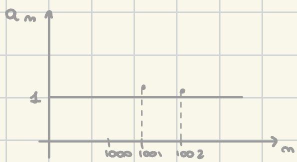
$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell \; ; \; \lim a_n = \ell$$

$$a_n \to \ell \quad \text{per } n \to +\infty$$

1. cadono nell'intorno destro di 1
2. cadono nell'intorno sinistro di 1
3. cadono nell'intorno di 1

a_n converge a $\ell \in \mathbb{R}$ per eccesso quando $\forall\, U_+(\ell)\ \exists\, \bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $a_n \in U_+(\ell)$, $\forall\, n \geq \bar{n}$ $\boxed{\lim a_n = \ell^+}$

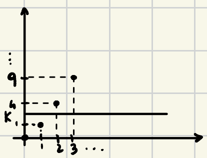
Esempio $a_n = \begin{cases} -100, & n \leq 1000 \\ 1+\frac{1}{n}, & n \geq 1001 \end{cases}$ $\lim a_n = 1^+$



a_n converge a $\ell \in \mathbb{R}$ per difetto quando $\forall\, U_-(\ell)\ \exists\, \bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $a_n \in U_-(\ell)$, $\forall\, n \geq \bar{n}$ $\boxed{\lim a_n = \ell^-}$

Ci sono a_n che non convergono né per eccesso né per difetto

$a_n = n^2$



SUCCESSIONE DIVERGENTE a $+\infty$ $(-\infty)$

Def Si dice che a_n diverge a $+\infty$ $(-\infty)$ quando $\forall\, K>0$ $(<)$ $\exists\, \bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$$a_n > K \; (<), \quad \underbrace{\forall\, n \geq \bar{n}}$$

va bene anche solo >

$$\lim a_n = +\infty \; ; \; \lim a_n = -\infty$$

$$a_n \to +\infty \; (-\infty), \quad \text{per } n \to +\infty$$

$a_m > K \iff a_m \in (K; +\infty)$

$a_n < K \iff a_m \in (-\infty; K)$

a_n diverge a $+\infty$ $(-\infty)$ quando $\forall\, U(+\infty)$ $(U(-\infty))$ $\exists\, \bar{m} \in \mathbb{N}$ tale che $a_m \in U(+\infty)$ $(U(-\infty))$, $\forall\, m \geq \bar{m}$

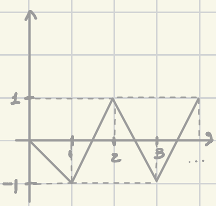
LIMITE DI UNA SUCCESSIONE

Def Si dice che il limite di a_m per $m \to +\infty$ è $\ell \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, quando $\forall\, U(\ell)$ $\exists\, \bar{m} \in \mathbb{N}$ tale che $a_m \in U(\ell)$, $\forall\, m \geq \bar{m}$

Successioni convergenti e divergenti = successione regolare

SUCCESSIONI IRREGOLARI

Esempio $a_m = (-1)^m$ IRREGOLARE



N.B. Se $\lim a_m = 0$ si dice che a_m è infinitesima.

Esempio $a_m = \frac{1}{m}$; $\lim a_m = 0$

N.B Se $\lim a_m = \pm\infty$ si dice che a_m è infinita.

TEOREMA

Se a_m è definitivamente positiva, allora $a_m \to +\infty$ se e solo se $\frac{1}{a_m} \to 0^+$

Dim i) Supponiamo $\frac{1}{a_m} \to 0^+$.

Per definizione $\frac{1}{a_m} \to 0^+ \iff$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{m} \in \mathbb{N}$ tale che

$$0 < \frac{1}{a_m} < 0 + \varepsilon \,, \forall m \geq \bar{m}$$

$$\underbrace{0 < \frac{1}{a_n}}_{\text{sempre vero (ipotesi)}} < \varepsilon$$

$$a_m > \frac{1}{\varepsilon} \,, \forall m \geq \bar{m}$$

Poni $\frac{1}{\varepsilon} = K$. $\underbrace{a_m > K}$, $\forall m \geq \bar{m}$. Quindi $a_m \to +\infty$

ε è qualunque come K è qualunque. Def succ ~~convergente~~ divergente a $+\infty$

ii) Supponiamo che $a_m \to +\infty$

Per definizione, $a_m \to +\infty \iff \forall K > 0, \exists \bar{m} \in \mathbb{N}$ tale che $a_m > K$, $\forall m \geq \bar{m}$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{1}{a_m} < \frac{1}{K} \,, \forall m \geq \bar{m}$$

Poni $\varepsilon = \frac{1}{K}$; $\underbrace{0 < \frac{1}{a_m} < \varepsilon}_{\text{def della successione che converge a } 0^+}$, $\forall n \geq \bar{m}$; quindi $\frac{1}{a_m} \to 0^+$

Il limite di una successione è unico

Teorema dell'unicità del limite

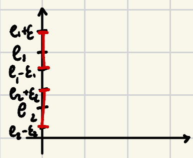
Se $\lim a_m = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$, allora ℓ è unico

Dim La effettuiamo nel caso $l \in \mathbb{R}$ ↓ convergente

Per assurdo, supponiamo che $\lim a_n = l_1 \in \mathbb{R}$ e anche $\lim a_n = l_2 \in \mathbb{R}$, con $l_1 \neq l_2$.

$\lim a_n = l_1 \iff \forall\, \varepsilon_1 > 0,\ \exists\, \bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $a_n \in U_{\varepsilon_1}(l),\ \forall\, n \geq \bar{n}$

$\lim a_n = l_2 \iff \forall\, \varepsilon_2 > 0,\ \exists\, \bar{\bar{n}} \in \mathbb{N}$ tale che $a_n \in U_{\varepsilon_2}(l_2),\ \forall\, n \geq \bar{\bar{n}}$



Posso scegliere $U_{\varepsilon_1}(l_1)$ e $U_{\varepsilon_2}(l_2)$ tale che $U_{\varepsilon_1}(l_1) \cap U_{\varepsilon_2}(l_2) = \emptyset$ allora per $n \geq \bar{\bar{\bar{n}}} = \max\{\bar{n}; \bar{\bar{n}}\}$

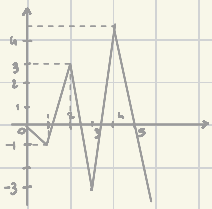
si ha $a_n \in U_{\varepsilon_1}(l_1) \cap U_{\varepsilon_2}(l_2) = \emptyset$. Assurdo (Perché a_n deve appartenere a entrambi gli intervalli contemporaneamente, per l'ipotesi ma i due intervalli non hanno elementi in comune)

N.B. Si ha $U_{\varepsilon_1}(l_1) \cap U_{\varepsilon_2}(l_2) = \emptyset$ quando $l_2 + \varepsilon_2 < l_1 - \varepsilon_1$; (supponendo $l_1 > l_2$)

$l_1 - l_2 > \varepsilon_1 + \varepsilon_2$

Esempio:

$a_n = (-1)^n \cdot n^2$



è irregolare

non converge e non diverge

Esempio:

$$a_n \begin{cases} \frac{1}{3^n}; & n \text{ pari} \\ \frac{1}{n^2}; & n \text{ dispari} \end{cases}$$

3^{-n}, n^{-2} convergono entrambe per zero

per eccesso $\lim a_n = 0^+$

$\forall \varepsilon>0, \exists \bar{m} \in \mathbb{N}$ tale che $0 < a_m < \varepsilon$; $\forall m \geq \bar{m}$

$0 < a_m < \varepsilon \iff \begin{cases} 0 < \frac{1}{3^m} < \varepsilon & \text{per pari} \\ 0 < \frac{1}{m^2} < \varepsilon & \text{per m dispari} \end{cases} \iff \begin{cases} 3^m > \frac{1}{\varepsilon}, & m \text{ pari} \\ m^2 > \frac{1}{\varepsilon}, & m \text{ dispari} \end{cases} \iff \begin{cases} m \log 3 > \log \frac{1}{\varepsilon}, & n \text{ pari} \\ m > \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}}, & n \text{ dispari} \end{cases} \rightarrow m > \frac{\log \frac{1}{\varepsilon}}{\log 3}$

$\bar{m} = \max \left\{ \frac{\log \frac{1}{\varepsilon}}{\log 3}, \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}} \right\}$ Per $m \geq \bar{m}$ si ha $0 < \frac{1}{3^m} < \varepsilon$ e $0 < \frac{1}{m^2} < \varepsilon$ quindi converge a 0 (da destra)

ESERCIZIO

$a_n \begin{cases} \sqrt[3]{m}, & m \text{ pari} \\ \sqrt{m}, & m \text{ dispari} \end{cases} \rightarrow$ DIVERGE A $+\infty$ $\lim a_m = +\infty$

Provare a dimostrare la divergenza

TEOREMA (H)

Def. Ogni successione convergente è limitata.

Non è vero il viceversa → ex. $a_m = (-1)^m$ è limitata ma non convergente
↳ è irregolare ma non monotona

TEOREMA REGOLARITÀ SUCCESSIONI MONOTONE

Def. Ogni successione monotona è regolare.
In particolare, se a_m è monotona crescente (decrescente) la successione:

i) CONVERGE se è limitata superiormente (inferiormente)
ii) DIVERGE a $+\infty$ $(-\infty)$ se non è limitata superiormente (inferiormente)

N.B. Monotonia ⇒ Regolarità (non invertibile)

ex. $a_m = 1 + (-1)^m \cdot \frac{1}{m}$ converge a 0 ma non è regolare

__Dim.__

Hp a_m crescente

i) Supponiamo a_m limitata superiormente

$E = \{a_0, a_1, a_2, \dots\}$

Siccome a_m è limitata superiormente, l'insieme E è limitato superiormente $\Rightarrow$ quindi E ha estremo superiore

Chiamiamo L l'estremo superiore di E e si ha:

a) $L \geq a_m$, $\forall m \geq \bar{m}$

b) $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \bar{m} \in \mathbb{N}$ tale che $a_{\bar{m}} > L - \varepsilon$

Siccome a_m è crescente, $\forall m \geq \bar{m}$ risulta $a_m \geq a_{\bar{m}} > L - \varepsilon$ ossia $\forall m \geq \bar{m}$, si ha $a_m > L - \varepsilon$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Per a)} & a_m \leq L, \ \forall m \geq \bar{m} \\ \text{Per b)} & a_m > L - \varepsilon, \ \forall m \geq \bar{m} \end{array}\right\}$$ Quindi per $m \geq \bar{m}$ si ha $L - \varepsilon < a_m \leq L$

Quindi $a_m \to L^-$ (convergente per difetto)

Dalla dimostrazione sappiamo che converge per difetto e all'estremo inferiore L (cose non dette nell'ipotesi.

CONTINUA →

01-10-2024

ii) Supponiamo che a_m non sia limitata superiormente

Allora $\forall K \in \mathbb{R}\ \exists \bar{m} \in \mathbb{N}$ tale che $a_{\bar{m}} > K$

Siccome a_m è monotona crescente, $\forall\, m \geq \bar{m}$ si ha $a_m \geq a_{\bar{m}} > K$ → DIVERGENTE A $+\infty$

quindi $a_m \to +\infty$

(Per decrescenti cambia i segni)

N.B. Il numero "e" (di Nepero)

Si dimostra che:

1) a_m è limitata
2) a_m è monotona crescente

} Il teorema dice che a_n converge al numero "e"

Infatti:

$$\lim \left(1+\frac{1}{m}\right)^m = e \cong 2,718$$

ALGEBRA DEI LIMITI DI SUCCESSIONI

a_m, b_m $\quad \lim a_m = \ell_1 \in \overline{\mathbb{R}}$

$\quad \lim b_m = \ell_2 \in \overline{\mathbb{R}}$

1) $\lim c \cdot a_m = c \cdot \ell_1, \ \forall c \neq 0$

ex. $\lim 2 \cdot \underbrace{3^m}_{+\infty} = +\infty$

2) $\lim (a_m + b_m) = \ell_1 + \ell_2$ tranne quando $\ell_1 = +\infty$, $\ell_2 = -\infty$ o viceversa

ex. $\lim \Big[\underbrace{\left(1+\frac{1}{m}\right)^m}_{e} + \underbrace{2^m}_{+\infty}\Big] = e + \infty = +\infty$

ex $a_m = \overset{+\infty}{m^2} + \overset{0}{\frac{1}{m}}$; $b_m = -m^2$

$\lim a_m = +\infty$
$\lim b_m = -\infty$
} se uso la regola esce $-\infty + \infty$

ma $\lim (a_m + b_m) = \lim \left(\cancel{m^2} + \frac{1}{m} - \cancel{m^2}\right) = 0$

3) $\lim (a_n \cdot b_n) = \ell_1 \cdot \ell_2$ tranne quando $\ell_1 = 0$ o viceversa
$\ell_2 = \pm\infty$

ex. $\lim \underbrace{\frac{1}{\underbrace{n}_{\to 0}}}\cdot \underbrace{2^n}_{\to +\infty} = 0 \cdot (+\infty)$ NON POSSO USARE LA REGOLA

4) $\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{\ell_1}{\ell_2}$ tranne quando $\ell_1 = \ell_2 = 0$ oppure $\ell_1 = \ell_2 = \pm\infty$

DIMOSTRAZIONE REGOLA 2

Supponiamo $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$
Sappiamo che $\lim a_n = \ell_1$ e $\lim b_n = \ell_2$

Per definizione $\lim a_n = \ell_1 \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists\ \bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $\underbrace{\ell_1 - \varepsilon < a_n < \ell_1 + \varepsilon}_{*}$, $\forall n \geq \bar{n}$

Per definizione $\lim b_n = \ell_2 \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists\ \bar{\bar{n}} \in \mathbb{N}$ tale che $\underbrace{\ell_2 - \varepsilon < b_n < \ell_2 + \varepsilon}_{**}$, $\forall n \geq \bar{\bar{n}}$

Pongo $\bar{\bar{\bar{n}}} = \max \{\bar{n}; \bar{\bar{n}}\}$
Per $n \geq \bar{\bar{\bar{n}}}$ valgono $*$ e $**$

Sommando membro a membro, si ha:
$\ell_1 + \ell_2 - 2\varepsilon < a_n + b_n < \ell_1 + \ell_2 + 2\varepsilon$
↳ pertanto vale per $n \geq \bar{\bar{\bar{n}}}$ → quindi $a_n + b_n$ converge a $\ell_1 + \ell_2$

FORME DI INDETERMINAZIONE

$\left.\begin{array}{l} +\infty - \infty \\ 0 \cdot (\pm\infty) \\ \frac{0}{0} \\ \frac{\infty}{\infty} \end{array}\right\}$ casi in cui le regole di calcolo non sono applicabili

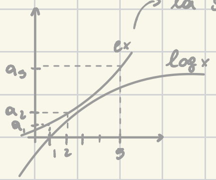
INFINITI E INFINITESIMI

Esempio

$a_n = e^n$; $b_n = \log n$

$\lim a_n = +\infty$

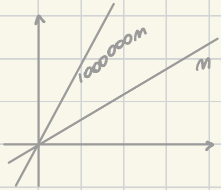
$\lim b_n = +\infty$



→ la successione a_n diverge a $+\infty$ più rapidamente dell'altra

Esempio

$a_n = n$; $b_n = 1'000'000\ n$



→ queste divergono con la stessa velocità

Def (ORDINE DI INFINITO)

a_n, b_n infinite

$$\lim \frac{a_n}{b_n} \begin{cases} 0 & (a_n \text{ è infinito di ordine inferiore rispetto a } b_n) \\ \pm\infty & (a_n \text{ è infinito di ordine superiore rispetto a } b_n) \\ K \neq 0 & (a_n \text{ e } b_n \text{ sono infiniti dello stesso ordine}) \\ \nexists & (a_n \text{ e } b_n \text{ sono infiniti non confrontabili}) \end{cases}$$

Esempio di prima:

$\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{\cancel{n}}{1'000'000\ \cancel{n}} = \frac{1}{1000000}$ che è un numero $\neq 0$ dunque sono infiniti dello stesso ordine

---

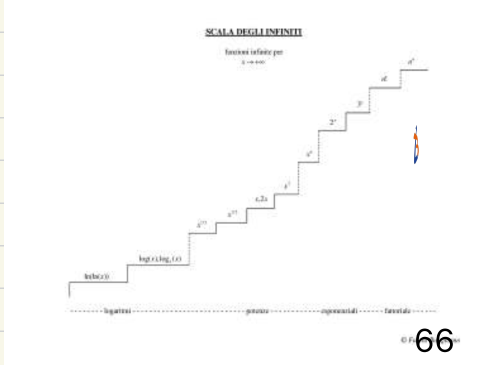
SUCCESSIONI INFINITE

q^n, $q > 1$ → geometrico ①

n^q, $q > 0$ → potenza ②

$(\log_a n)^\gamma$, $\gamma > 0$ → logaritmo ③

① > ② > ③ ORDINI DI INFINITO



⓪ $m!$ è un ordine superiore a ①

↳ $m! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot m$

Esempio $\lim \frac{2^m}{m^3} = +\infty$

$\lim \frac{(\log_2 m)^h}{m^3} = 0$

per la gerarchia degli infiniti

TEOREMA

a_m, b_m, c_m, d_m infinite

con a_m di ordine superiore rispetto a b_m e con c_m di ordine superiore rispetto a d_m

$$\lim \frac{a_m + \cancel{b_m}}{c_m + \cancel{d_m}} = \lim \frac{a_m}{c_m}$$ → gli infiniti di ordine inferiore sono trascurabili

Esempio $\lim \frac{\cancel{m^2} - \cancel{m^3} + e^m}{\cancel{\log m} - \cancel{\sqrt{m}} + 2^m} = \lim \frac{e^m}{2^m} = \lim \left(\frac{e}{2}\right)^m = +\infty$

CONFRONTO STESSO TIPO

Ex. $2^m; 3^m$ → va a infinito più velocemente (con esponente e base più grande)

$m^2; m^3$

$\boxed{\log_2 m; \log_3 m}$ → sono infiniti dello stesso ordine

---

CONFRONTO INFINITESIME

Def (ORDINE DI INFINITESIMO)

a_m, b_m infinitesime

$\lim \frac{a_m}{b_m}$
- 0 (a_m è infinitesimo di ordine superiore rispetto a b_m)
- $\pm\infty$ (a_m è infinitesimo di ordine inferiore rispetto a b_m)
- $K \neq 0$ (a_m e b_m sono infinitesimi dello stesso ordine)
- $\nexists$ (a_m e b_m sono infinitesimi NON confrontabili)

ex $a_m = (-1)^m \cdot \frac{1}{m} \to 0$

$b_n = \frac{1}{n} \to 0$

$\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim \frac{(-1)^n \cdot \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}$ però $\lim (-1)^n \nexists$ quindi NON confrontabili

---

SUCCESSIONI INFINITESIME

0. $\frac{1}{n!}$
1. q^n, $-1<q<1$
2. $\frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha>0$
3. $\frac{1}{(\log_a n)^\gamma}$, $\gamma>0$

ex. $\lim \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{n^4}} = 0$

TEOREMA a_n, b_n, c_n, d_n infinitesime

a_n è infinitesima di ordine superiore a b_n

c_n è infinitesima di ordine superiore a d_n

$\lim \frac{\cancel{a_n}+b_n}{\cancel{c_n}+d_n} = \frac{b_n}{d_n}$ → cancello gli infinitesimi di ordine superiore (TRASCURABILI)

ex. $\lim \frac{\frac{1}{n}-\frac{1}{n!}}{\frac{2}{n}-\left(\frac{1}{2}\right)^n} = \lim \frac{\frac{1}{n}}{\frac{2}{n}} = \lim \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

TEOREMA (H)

Ogni successione convergente è limitata.

<u>Dim</u> Sia a_n una successione convergente a $\ell \in \mathbb{R}$. Consideriamo $\varepsilon = 1$. Siccome a_n converge a ℓ, per definizione $\exists n_1 \in \mathbb{N}$ tale che $a_n \in (\ell - 1, \ell + 1)$, ossia $|a_n - \ell| < 1$, $\forall n \geq n_1$.

Sia $M > 0$ una costante tale che $M > \max\{1, |a_1 - \ell|, \dots, |a_{n_1 - 1} - \ell|\}$
Per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha $|a_n - \ell| < M$, ossia $\forall n \in \mathbb{N}$ risulta

$$\ell - M < a_n < \ell + M$$

Pertanto a_n è limitata $\square$

X IL PROF

$\log \Rightarrow \ln$

$\text{Log} = \log$

I SIMBOLI $\sim$ e "o"

$\sim$ = asintotico

o = o piccolo

1) $\sim$

a_n e b_n successioni

Si dice che a_n e b_n sono asintotiche (o che a_n è asintotica a b_n) e si scrive $a_n \sim b_n$ per $n \to +\infty$

quando $\lim \frac{a_n}{b_n} = 1$

Esempio Stabilire se $\log\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$ per $n \to +\infty$

$$\lim \frac{\log\left(1+\overset{\to 0}{\frac{1}{n}}\right)}{\frac{1}{n}} = \lim n \cdot \log\left(1+\frac{1}{n}\right) = \lim \log \boxed{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}^{\to e} = \log e = 1$$

2) o

a_n, b_n

Si dice che a_n è "o" di b_n e scrive $a_n = o(b_n)$ per $n \to +\infty$,

quando $\lim \frac{a_n}{b_n} = 0$

N.B. 1) a_n, b_n infinite

$a_n = o(b_n) \Longleftrightarrow a_n$ è infinito di ordine inferiore rispetto a b_n

2) a_n, b_n infinitesima

$a_n = o(b_n) \Longleftrightarrow a_n$ è infinitesimo di ordine sup rispetto a b_n

3) $b_n = 1$

$a_n = o(b_n)$; $a_n = o(1)$

$a_n = o(1) \Longleftrightarrow \lim a_n = 0$

CRITERIO DEL CONFRONTO E CRITERIO DEL RAPPORTO

Criterio = test

1) CONFRONTO (CARABINIERI)

TEOREMA a_n, b_n, c_n successioni

Se definitivamente si ha $c_n \le a_n \le b_n$ e risulta $\lim c_n = \lim b_n = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$, allora anche $\lim a_n = \ell$

Dim

i) $\ell \in \mathbb{R}$

$\lim c_n = \ell \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{m} \in \mathbb{N}$ tale che $\ell - \varepsilon < c_n < \ell + \varepsilon, \ \forall m \geq \bar{m}$

$\lim b_m = \ell \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{\bar{m}} \in \mathbb{N}$ tale che $\ell - \varepsilon < b_n < \ell + \varepsilon, \ \forall m \geq \bar{\bar{m}}$

Per ipotesi $\exists \bar{\bar{\bar{m}}} \in \mathbb{N}$ tale che $c_n \leq a_m \leq b_m, \ \forall n \geq \bar{\bar{\bar{n}}}$

Pongo $m^* = \max \{\bar{m}; \bar{\bar{m}}; \bar{\bar{\bar{m}}}\}$. Per $n \geq m^*$ valgono 1), 2), 3). Quindi: $\ell - \varepsilon < c_n \leq a_m \leq b_m < \ell + \varepsilon$

Pertanto $\ell - \varepsilon < a_m < \ell + \varepsilon$ per $m \geq m^*$. Quindi $a_m \to \ell$

ii) $\ell = +\infty$

$\lim c_m = \lim b_n = +\infty$

$\lim c_n = +\infty \Leftrightarrow \forall K > 0 \ \exists \bar{m} \in \mathbb{N}$ tale che $c_n > K, \ \forall m \geq \bar{m}$.

$\lim b_m = +\infty \Leftrightarrow \forall K > 0, \ \exists \bar{\bar{m}} \in \mathbb{N}$ tale che $b_m > K, \ \forall m \geq \bar{\bar{m}}$.

Per ipotesi $\exists \bar{\bar{\bar{m}}} \in \mathbb{N}$ tale che $c_m \leq a_m \leq b_n, \ \forall m \geq \bar{\bar{\bar{m}}}$.

Per $n \geq m^*$ $a_n \geq c_n > K$. Quindi $a_m \to +\infty$

Esempio $a_m = \frac{\operatorname{sen} m}{m}$

$-1 \leq \operatorname{sen} m \leq 1$

$$\underbrace{-\frac{1}{m}}_{0} \leq \frac{\operatorname{sen} m}{m} \leq \underbrace{\frac{1}{m}}_{0}$$

$$\lim \frac{\operatorname{sen} n}{n} = 0$$

2) CRITERIO DEL RAPPORTO

TEOREMA

Se $\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$, allora $\lim a_n = 0$

Esempio Mostriamo che $\forall d>0$, $\forall q>1$ risulta $\lim \boxed{\frac{n^d}{q^n}} = 0$ $\to a_n$

$$\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{\frac{(n+1)^d}{q^{n+1}}}{\frac{n^d}{q^n}} =$$

$$= \lim \frac{q^n}{n^d} \cdot \frac{(n+1)^d}{q^{n+1}} = \lim \frac{1}{q} \cdot \Big(1 + \underbrace{\boxed{\tfrac{1}{n}}}_{\to 0}\Big)^d = \frac{1}{q} < 1$$

Esempio $a_n = \frac{1}{n}$

$\lim a_n = 0$

$$\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim n \cdot \frac{1}{n+1} = \lim \frac{n}{n+1} = \lim \frac{n+1-1}{n+1} = \lim 1 - \frac{1}{n+1} = 1$$

Teorema (H) sulla caratterizzazione di $x_n \sim y_n$ mediante l'uso di o

Si ha

$$a_n \sim b_n \iff a_n = b_n + o(b_n).$$

<u>Dim</u> $\Leftarrow$ Sia $a_n = b_n + o(b_n)$. Si ha: $\dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{b_n + o(b_n)}{b_n} = 1 + \dfrac{o(b_n)}{b_n} \longrightarrow 1$.

$\Rightarrow$ Sia $a_n \sim b_n$. Poniamo $c_n = a_n - b_n$. Si ha: $\dfrac{c_n}{b_n} = \dfrac{a_n - b_n}{b_n} = \dfrac{a_n}{b_n} - 1 \longrightarrow 0$, siccome $\dfrac{a_n}{b_n} \to 1$.

Pertanto $c_n = o(b_n)$ e riordinando si ottiene $a_n - b_n = o(b_n)$, ossia $a_n = b_n + o(b_n)$. $\square$

Limiti notevoli (successioni)

Se $a_n \to 0$ per $n \to +\infty$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\operatorname{sen} a_n}{a_n} = 1 \iff \operatorname{sen} a_n \sim a_n$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1 - \cos a_n}{a_n^2} = \frac{1}{2} \iff \cos a_n \sim 1 - \frac{(a_n)^2}{2}$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\tan a_n}{a_n} = 1 \iff \tan a_n \sim a_n$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\arctan a_n}{a_n} = 1 \iff \arctan a_n \sim a_n$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{e^{a_n} - 1}{a_n} = 1 \iff e^{a_n} \sim 1 + a_n$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\ln(1 + a_n)}{a_n} = 1 \iff \ln(1 + a_n) \sim a_n$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{(1 + a_n)^q - 1}{a_n} = q \iff (1 + a_n)^q \sim 1 + q a_n$$

SERIE NUMERICHE

1) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{10}$

$$\sum_{s=1}^{10}\frac{1}{s}$$

2) q^n

$$\underbrace{q^0+q^1+q^2+\dots+q^n}_{n+1}=\sum_{s=0}^{n}q^s$$

$$S=q^0+q^1+q^2+\dots+q^n$$

$q=1$ $\quad S=n+1$

$q=0$ $\quad q^1+q^2+\dots+q^n=0$

$q\neq 1;\ q\neq 0$

$$qS=\cancel{q^1}+\cancel{q^2}+\cancel{q^3}+\dots+q^{n+1}$$

raccolgo S a fattor comune

$$S(1-q)=1-q^{n+1};\quad \boxed{S=\frac{1-q^{n+1}}{1-q}}$$

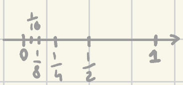
$$2^0+2^1+2^2+2^3+\dots+2^{100}=\frac{1-2^{101}}{1-2}\ \dots$$

$$\sum_{s=0}^{n}q^s=\frac{1-q^{n+1}}{1-q},\quad q\neq 1,\ q\neq 0$$

$$\sum_{s=m}^{n}q^s=\frac{q^m-q^{n+1}}{1-q},\quad q\neq 1,\ q\neq 0$$

SERIE

Esempio



$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\dots=\sum_{s=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^s=1$$

$$\sum_{s=1}^{m} \left(\frac{1}{2}\right)^s = \frac{\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{m+1}}{1-\frac{1}{2}} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^m = S_m$$

$$\lim_{m \to +\infty} S_n = \lim_{n \to +\infty} 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{\overset{\to 0}{m}} = 1$$

a_m successione

$$\sum_{s=0}^{+\infty} a_s = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

$a_0 = S_0$

$a_0 + a_1 = S_1$

$a_0 + a_1 + a_2 = S_2$

$\vdots$

$a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_m = \underset{\text{successione}}{S_m}$

$\vdots$

S_m = successione delle somme parziali

04-10-24

Successioni

$a_n \sim b_n \iff \lim \frac{a_n}{b_n} = 1$

Teorema i) a_n, b_n, c_n, d_n infinite

Con a_n infinito di ordine superiore rispetto a b_n e c_n infinito di ordine superiore rispetto a d_n. Allora

$$\frac{a_n+b_n}{c_n+d_n} \sim \frac{a_n}{c_n}$$

Esempio $\quad m_n = \frac{n^2+n}{n^3+n^2} \sim \frac{n^2}{n^3} = \frac{1}{n}$

ii) a_n, b_n, c_n, d_n infinitesime, con a_n infinitesimo di ordine superiore rispetto a b_n e c_n infinitesimo di ordine sup. rispetto a d_n, allora:

$$\frac{a_n+b_n}{c_n+d_n} \sim \frac{b_n}{d_n}$$

Serie

Successione $a_s, s \in \mathbb{N}$

$$\sum_{s=0}^{+\infty} a_s$$

$a_0 = S_0$

$a_0 + a_1 = S_1$

$a_0 + a_1 + a_2 = S_2$

$\vdots$

$a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n = S_n = \sum_{s=0}^{n} a_s \qquad n \to +\infty$

$\vdots$

DEFINIZIONE DI SERIE

<u>Def.</u> Sia a_s una successione.
Si dice serie di termine generale a_s, la successione $S_m = \sum_{s=0}^{m} a_s$.

l'indice della succ è $s=0$ ma potrebbe essere qualsiasi numero (ex. 1, 18, ...)

Utilizzeremo: $\sum_{s=0}^{+\infty} a_s$

è una forma più contratta della definizione di serie

<u>Esempio</u> Consideriamo la serie

$\sum_{s=0}^{+\infty} \frac{1}{s+1}$. Scrivere i primi 3 termini di S_m

$S_0 = 1$; $S_1 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$; $S_2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}$

Successioni → convergenti, divergenti, irregolari $\Longrightarrow$ SERIE → convergenti, divergenti, irregolari

<u>Def</u> i) Si dice che una serie converge quando S_m converge;
ii) Si dice che una serie diverge a $\pm\infty$ quando S_m diverge a $\pm\infty$;
iii) Si dice che una serie è irregolare quando S_m è irregolare.

<u>Esempio</u> i) $\sum_{s=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^s$; $S_m = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^m \longrightarrow 1$. Serie convergente

iii) $\sum_{s=0}^{+\infty} (-1)^s$; $S_0 = 1$; $S_1 = 1 + (-1) = 0$, $S_2 = 1 + (-1) + 1 = 1$; $S_3 = 1 + (-1) + 1 + (-1) = 0$ ... SERIE IRREGOLARE

ii) $\sum_{s=0}^{+\infty} 1$

$S_m = \sum_{s=0}^{m} 1 = m + 1 \longrightarrow +\infty$. Serie diverge a $+\infty$.

$$\sum_{s=0}^{+\infty} (-1)^s = [1 + [(-1)] + 1] + [(-1) + 1] + [(-1)] + \dots$$

se utilizzassi la proprietà associativa

1) $\sum_{s=0}^{+\infty} (-1)^s = 0$

2) $\sum_{s=0}^{+\infty} (-1)^s = 1$

$\Longrightarrow$ NON VALE LA PROPRIETÀ ASSOCIATIVA!

SERIE NOTEVOLI:

1) Serie di Mengoli (M)

$$\sum_{s=1}^{+\infty} \frac{1}{s(s+1)} \text{ converge a } 1 \longrightarrow \lim S_m = 1$$

Si calcola che $S_m = 1 - \frac{1}{m+1} = \sum_{s=1}^{m} \frac{1}{s(s+1)} \to 1$

2) Serie armonica (no dim.)

$$\sum_{s=1}^{+\infty} \frac{1}{s} \text{ diverge a } +\infty$$

Serie armonica generalizzata:

$\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^a}$ converge $\iff a > 1$

diverge a $+\infty \iff a \leq 1$

3) Serie geometrica

$$\sum_{s=0}^{+\infty} q^s$$

con $q \in \mathbb{R}$

Se diverge, converge o è irregolare, dipende da q

Formula generale per la somma di una serie geometrica convergente:

se $|q|<1$ allora $\sum_{m=N}^{+\infty} q^m = \frac{q^N}{1-q}$

N.B. $\sum_{s=0}^{m} q^s = \frac{1-q^{m+1}}{1-q}$, $q \neq 1$

$\sum_{s=0}^{m} q^s = m+1$, $q = 1$

$$q \neq 1: \quad S_m = \sum_{s=0}^{m} q^s = \frac{1 - \overbrace{q^{m+1}}^{\to -\infty}}{\boxed{1-q} < 0}$$

$q = -1$

$S_m = \frac{1-(-1)^{m+1}}{1-(-1)}$

$$\lim S_m = \begin{cases} +\infty, & q > 1 \\ \frac{1}{1-q} & -1 < q < 1 \\ \nexists & q \leq -1 \text{ perché è irregolare} \end{cases}$$

N.B. $q = 0 \Rightarrow \frac{1-0}{1-0} = 1$

Per dim dobbiamo dim la formula e poi calcolare $\lim S_m$

↓

del carattere della serie geom

TEOREMA: carattere della serie geometrica

La serie $\sum_{m=0}^{+\infty} q^m$ è detta serie geometrica e la sua successione associata $a_m = q^m$ è la successione geometrica in cui è costante il rapporto tra un elemento e il suo precedente (q è la ragione)

La serie geometrica:

$$\sum_{m=q}^{+\infty} q^m = \begin{cases} \text{converge se } -1<q<1 \Rightarrow S=\frac{1}{1-q} \text{ se } q=0 \text{ e } S=\frac{q^q}{1-q} \text{ se } q\geq 0 \\ \text{diverge a } +\infty \text{ se } q\geq 1 \\ \text{irregolare se } q\leq -1 \end{cases}$$

<u>DIMOSTRAZIONE</u>: sapendo che il termine generale della successione delle somme parziali di q^m è:

$$S_m = \frac{1-q^{m+1}}{1-q} \quad \text{se } q\neq 1 \text{ e } S_m = m+1 \text{ se } q=1$$

Si distinguono 5 casi:

1) se $|q|<1 \iff -1<q<1$ si ha che: $\lim_{m\to+\infty} S_m = \lim_{m\to+\infty} \frac{1-q^{m+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q}$ converge a $S=\frac{1}{1-q}$

2) Se $q=1$ si ha che $\lim_{m\to+\infty} S_m = \lim_{m\to+\infty} (m+1) = +\infty$ diverge a $+\infty$

3) se $q=-1$ si ha che $\lim_{m\to+\infty} S_m = \lim_{m\to+\infty} \frac{1-q^{m+1}}{1-q} = \nexists$ irregolare

4) Se $q>1$ si ha che $\lim_{m\to+\infty} S_m = \lim_{m\to+\infty} \frac{1-q^{m+1}}{1-q} = +\infty$ diverge a $+\infty$

5) Se $q<1$ si ha che $\lim_{m\to+\infty} S_m = \lim_{m\to+\infty} \frac{1-q^{m+1}}{1-q} = \nexists$ irregolare

Esempio $0,\bar{9} = 1$

$$0,\bar{9} = 0,99999999\ldots = 0,9 + 0,09 + 0,009 + 0,0009 + \ldots = \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \ldots = 9\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \ldots\right) = 9 \cdot \sum_{s=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^s =$$

$$= 9 \cdot \left(\frac{1}{1-\frac{1}{10}} - 1\right) = 9\left(\frac{1}{\frac{9}{10}} - 1\right) = 9\left(\frac{10}{9} - 1\right) = 9 \cdot \frac{10-9}{9} = 1$$

C.N. per la convergenza di una serie

$\hookrightarrow$ condizione necessaria

Teorema (H). Se $\sum_{s=0}^{+\infty} a_s$ converge, allora $\lim_{s \to +\infty} a_s = 0$, ossia a_s è infinitesima.

Esempio

i) $\sum_{s=0}^{+\infty} \frac{s^2 + s}{2s^2 + \sqrt{s}}$

$a_s = \frac{s^2 + s}{2s^2 + \sqrt{s}}$

$\lim_{s \to +\infty} a_s = \lim_{s \to +\infty} \frac{s^2 + s}{2s^2 + \sqrt{s}} = \frac{1}{2} \neq 0$ NON CONVERGE

ii) $\sum_{s=1}^{+\infty} \frac{1}{s}$ diverge a $+\infty$

$\lim_{s \to +\infty} a_s = \lim_{s \to +\infty} \frac{1}{s} = 0$ ma non converge

CRITERI DI CONVERGENZA PER SERIE A TERMINI NON NEGATIVI

Serie a termini non negativi

$$\sum_{s=0}^{+\infty} a_s, \quad a_s \geq 0 \text{ definitivamente.}$$

TEOREMA (H) Ogni serie a termini NON negativi è REGOLARE (converge o diverge a $+\infty$)

1) Criterio del confronto
2) Criterio del confronto asintotico

→ per serie a termini NON negativi

N.B. 1) Il carattere di una serie non cambia se si modificano o si cancellano un numero finito di addendi

Esempio $\sum_{s=0}^{+\infty} a_s; \; a_s = \begin{cases} \frac{1}{s+1}, & 0 \leq s \leq 100 \\ \frac{1}{s(s+1)}, & s \geq 101 \end{cases}$ → converge

$\sum_{s=1}^{+\infty} \frac{1}{s(s+1)}$ converge

NON CONVERGONO ALLO STESSO NUMERO

2) Si parla di serie a termini di segno costante.

3) Esempio $\sum_{s=0}^{+\infty} a_s; \; a_s = \begin{cases} \frac{1}{s+1}, & 0 \leq s \leq 100 \\ \frac{1}{s}, & s \geq 101 \end{cases}$ a termini non negativi

1) CONFRONTO (no dim)

$\sum_{s=0}^{+\infty} a_s; \; \sum_{s=0}^{+\infty} b_s$ a termini non neg., con $0 \leq a_s \leq b_s$ definitivamente

i) Se $\sum_{s=0}^{+\infty} b_s$ converge, allora anche $\sum_{s=0}^{+\infty} a_s$ converge

ii) Se $\sum_{s=0}^{+\infty} a_s$ diverge, allora anche $\sum_{s=0}^{+\infty} b_s$ diverge

$\sum_{s=0}^{+\infty} b_s$ serie maggiorante ; $\sum_{s=0}^{+\infty} a_s$ minorante.

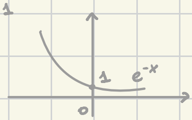
N.B. Serie armonica generalizzata

$$\sum_{s=1}^{+\infty} \frac{1}{s^\alpha} \begin{cases} \text{converge, se } \alpha>1 \\ \text{diverge a } +\infty \text{, se } \alpha \le 1 \end{cases}$$

Esempio i) $\sum_{s=1}^{+\infty} \frac{e^{-s}}{s^2}$

$\frac{e^{-s}}{s^2} \ge 0$; $\lim_{s\to+\infty} \frac{\overbrace{e^{-s}}^{\to 0}}{\underbrace{s^2}_{\to+\infty}} = 0$

$e^{-s} \le 1$



$\frac{e^{-s}}{s^2} \le \frac{1}{s^2}$

$\sum_{s=1}^{+\infty} \frac{1}{s^2}$ converge

ii) $\sum_{s=1}^{+\infty} \frac{s}{e^s}$

$\lim_{s\to+\infty} \frac{s}{e^s} = 0$; $e^s \ge s^2$ definitivamente

$\frac{1}{e^2} \le \frac{1}{s^2}$ definitiv.

$\frac{s}{e^2} \le \frac{s}{s^2} = \frac{1}{s}$ definitiv

$\sum_{s=1}^{+\infty} \frac{1}{s}$ maggiorante (è armonica quindi diverge a $+\infty$)

$e^s \ge s^3$ def.

$\frac{1}{e^s} \le \frac{1}{s^3}$ def.

$\frac{s}{e^s} \le \frac{s}{s^3} = \frac{1}{s^2}$

$\sum_{s=1}^{+\infty} \frac{1}{s^2}$ CONVERGE

2) CONFRONTO ASINTOTICO

$\sum_{s=0}^{+\infty} a_s$; $\sum_{s=0}^{+\infty} b_s$; a_s e $b_s \ge 0$ definitivamente

Se $a_s \sim b_s$ per $s \to +\infty$, le due serie hanno lo stesso carattere

Esempio: $\sum_{s=1}^{+\infty} \frac{s+\log s}{s^2+s}$ diverge a $+\infty$ $\qquad \sum_{s=1}^{+\infty} \frac{1}{s}$ diverge a +infinito

$$\frac{s+\log s}{s^2+s} \sim \frac{s}{s^2} = \frac{1}{s}$$

Serie a termini di segno qualunque

Ne def. ≥ 0 né ≤ 0

Esempio $\sum_{s=1}^{+\infty} (-1)^s \cdot \frac{1}{s^2}$

$\sum_{s=0}^{+\infty} a_s$; $\sum_{s=0}^{+\infty} |a_s| \rightarrow \sum_{s=1}^{+\infty} \left|(-1)^s \cdot \frac{1}{s^2}\right| = \sum_{s=1}^{+\infty} \frac{1}{s^2} \rightarrow$ converge allora anche quella di partenza converge

Teorema: Se $\sum_{s=0}^{+\infty} |a_s|$ converge, anche $\sum_{s=0}^{+\infty} a_s$ converge. (Non vale il viceversa)

TEOREMI H sulle SERIE

CARATTERE DELLA SERIE DI MENGOLI

La serie di Mengoli $\sum_{s=1}^{+\infty} \frac{1}{s(s+1)}$ converge a 1.

Dim

Si ha $\frac{1}{m(m+1)} = \frac{1}{m} - \frac{1}{m+1}$, $\forall m \in \mathbb{N}$ $m \neq 0$.

Pertanto:

$1\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)\dots\left(+\frac{1}{m-1}\right)\left(-\frac{1}{m}+\frac{1}{m}\right)-\frac{1}{m+1}$

$\frac{m+1-1}{m+1} = \frac{m}{m+1} \to \lim_{n\to+\infty} \frac{m}{m+1} = 1$

$$S_m = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \dots + \frac{1}{m(m+1)} = \left(1-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{m}-\frac{1}{m+1}\right) = 1 - \frac{1}{m+1} \to 1 \text{ per } m \to +\infty.$$

Pertanto la serie di Mengoli converge con somma 1

TEOREMA (condizione necessaria per la convergenza).

Se la serie $\sum_{s=0}^{+\infty} a_s$ converge, allora $a_s \to 0$, per $s \to +\infty$

$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = S$

Dim

Si ha:

$$S_n = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{m-1} + a_m$$
$$S_{m-1} = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{m-1}$$

$\to S_m - S_{m-1} = a_m$

$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} a_n$

Pertanto $a_m = S_m - S_{m-1}$ e quindi $\lim_{m\to+\infty} a_m = \lim_{m\to+\infty} S_m - \lim_{m\to+\infty} S_{m-1}$

Essendo, per ipotesi, la serie convergente $\sum_{m=0}^{+\infty} a_m = S$, si ha che $\lim_{n\to+\infty} S_n = S$ e ovviamente anche $\lim_{n\to+\infty} S_{m-1} = S$

Siccome S_n converge, si ha $\lim_{m\to+\infty} S_m = \lim_{m\to+\infty} S_{m-1} = S \in \mathbb{R}$

Quindi $\lim_{m\to+\infty} a_m = S - S = 0$ $\square$

(Si osservi che in una successione l'indice è muto. Quindi $\lim_{s\to+\infty} a_s = \lim_{m\to+\infty} a_m$).

TEOREMA (Regolarità delle serie a termini non negativi).

Ogni serie a termini non negativi è regolare. In particolare converge se e solo se S_n è limitata superiormente.

Dim

Consideriamo una serie $\sum_{s=0}^{+\infty} a_s$ con $a_s \geq 0 \ \forall s$ (la dimostrazione può essere effettuata anche supponendo $a_s \geq 0$ definitivamente).

Si ha $S_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n$

$S_{n+1} = a_0 + a_1 + \dots + a_n + a_{n+1}$.

Siccome $a_s \geq 0 \ \forall s$, si ha $S_{n+1} \geq S_n$, $\forall n$. Pertanto la successione S_n è monotona crescente e quindi regolare.

In particolare sappiamo che S_n converge quando è limitata superiormente, altrimenti diverge a $+\infty$. □

08-10-2024

TEOREMA

Se $\underbrace{\sum_{s=0}^{+\infty} |a_s| \text{ converge}}$, anche $\underbrace{\sum_{s=0}^{+\infty} a_s \text{ converge}}_{\text{converge semplicemente}}$.

~~convessa~~ converge semplicemente

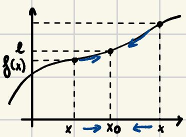
Si dice che $\sum_{s=0}^{+\infty} a_s$ converge assolutamente

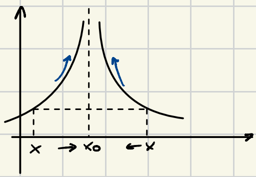
---

I LIMITI

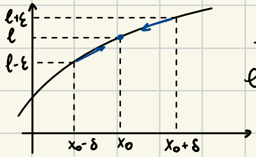
LIMITI DI FUNZIONI DI UNA E PIÙ VARIABILI:

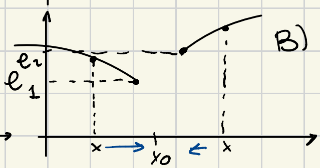
Esempio





A)





B)

DEFINIZIONE DI LIMITE

Def (limite per f di una variabile) → Def TOPOLOGICA

$f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $x_0 \in A'$. Si dice che il limite di f per x che tende a x_0 vale $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ (e si scrive $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$) quando $\forall\, U(\ell)\ \exists\, V(x_0)$ tale che $f(x) \in U(\ell)$, $\forall x \in V(x_0) \cap A$, $x \neq x_0$

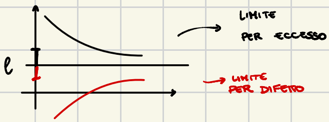
Def equivalente (caso A): $\ell \in \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$

$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ quando $\forall \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0$ tale che $\ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon$ $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap A$, con $x \neq x_0$

NEL CASO DI B) LIM DESTRO e SINISTRO

Def (limite per f di una variabile) → Def TOPOLOGICA

$f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $x_0 \in A'$. Si dice che il limite di f per x che tende a x_0 da destra vale $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ (e si scrive $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell$) quando $\forall\, U(\ell)\ \exists\, V_+(x_0)$ tale che $f(x) \in U(\ell)$, $\forall x \in V_+(x_0) \cap A$, $x \neq x_0$



Def (limite PER ECCESSO per f di una variabile) → Def TOPOLOGICA

$f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $x_0 \in A'$. Si dice che il limite di f per x che tende a x_0 vale $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ per eccesso (e si scrive $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell^+$) quando $\forall\, U_+(\ell)\ \exists\, V(x_0)$ tale che $f(x) \in U_+(\ell)$, $\forall x \in V(x_0) \cap A$, $x \neq x_0$

Esempio

Mostrare che

$\lim_{x \to 3} 2x+5 = 11$

$11 - \varepsilon < 2x+5 < 11+\varepsilon$

1) $2x+5 < 11+\varepsilon$; $2x < 6+\varepsilon$; $x < 3+\frac{\varepsilon}{2}$

2) $11-\varepsilon < 2x+5$; $2x > 6-\varepsilon$; $x > 3-\frac{\varepsilon}{2}$

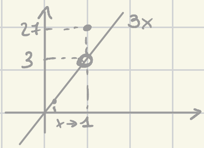
$3-\frac{\varepsilon}{2} < x < 3+\frac{\varepsilon}{2}$

$\delta = \frac{\varepsilon}{2}$

Nella def abbiamo detto che $x \neq x_0$

Esempio

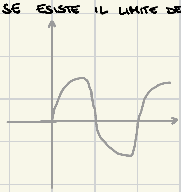
$$f(x) = \begin{cases} 3x, & x \neq 1 \\ 27, & x = 1 \end{cases}$$



$\lim_{x \to 1} f(x) = 3$

UN LIMITE ESISTE SE ESISTE IL LIMITE DESTRO E SINISTRO E SONO UGUALI

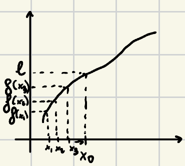
Esempio



$\nexists \lim_{x \to +\infty} \operatorname{sen} x$

LIMITI DI SUCCESSIONI E LIMITI DI FUNZIONI

Teorema $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $x_0 \in A'$. Si ha $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ se e solo se risulta $\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = \ell$, $\forall x_n \in A$ $x_n \to x_0$ con $x_n \neq x_0$ $\forall n$.



Funzioni continue

Def $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $x_0 \in A \cap A'$.

1) Se dice che f è continua in x_0 quando $\lim_{x \to x_0} f(x)$ esiste ed è uguale a $f(x_0)$.

$\left(\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0) \right)$.

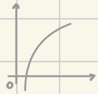
2) Se $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è continua in tutti i punti $x_0 \in A$, allora f si dice continua.

N.B. 1) Ogni funzione elementare è continua nei punti del dominio.

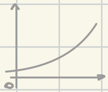
Esempio $\lim_{x \to 3} e^x = e^3$

2) Ogni funzione che somma, prodotto, quoziente, composizione di funzioni elementari è continua nei punti del dominio

Esempio 1) $\lim_{x \to 0^+} \log x = -\infty$



2) $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$



ALGEBRA DEI LIMITI

$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell_1$; $\lim_{x \to x_0} g(x) = \ell_2$

1) $\lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = \ell_1 + \ell_2$

2) $\lim_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = \ell_1 \cdot \ell_2$

3) $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\ell_1}{\ell_2}$

Esempio $\lim_{x \to 0^+} \left(5 + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{1}{x}\right) = 5 + 1 - \frac{\overset{\nearrow -\infty}{1}}{0} = +\infty$

PUNTI DI DISCONTINUITÀ E PROPRIETÀ DELLE FUNZIONI CONTINUE.

N.B. Continuità in x_0 $\iff$ $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, con $\lim_{x \to x_0} f(x) \in \mathbb{R}$, $f(x_0) \in \mathbb{R}$

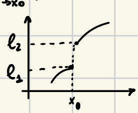
$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tale che $f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon$, $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $x \in A$

PUNTI DI DISCONTINUITÀ

Punti del dominio in cui f non è continua.

1) Discontinuità a Salto.

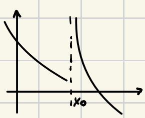
$\lim_{x \to x_0^+} f(x)$, $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ esistono finiti ma sono diversi



2) Discontinuità essenziale

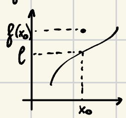
$\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ o $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$

sono infiniti



3) Discontinuità eliminabile

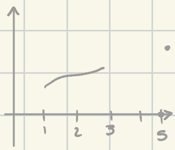
$\lim_{x \to x_0} f(x)$ $\exists$ finito ma è diverso da $f(x_0)$.



N.B. (Sulla def. di continuità)

Se $x_0 \in A$ è punto isolato di A, si dice che f è continua per def. in x_0.

$f: [1,3] \cup \{5\} \to \mathbb{R}$



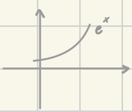
È continua in 5 per convenzione

Proprietà delle funzioni continue.

1) TEOREMA DI WEISTRASS

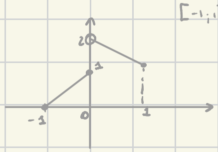
$f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua su un insieme A compatto. Allora f ammette massimo e minimo assoluto.

Esempio $f(x) = e^x$; $A = (-\infty; +\infty)$



Esempio $f(x) = \begin{cases} 1+x; & -1 \le x \le 0 \\ 2-x; & 0 < x \le 1 \end{cases}$

$[-1;1]$

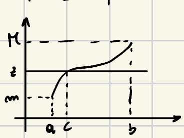


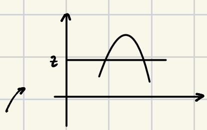
2) TEOREMA di DARBOUX, dei valori intermedi

$f: [a;b] \to \mathbb{R}$ continua. Poniamo

$$m = \min_{m \in [a;b]} f(x), \quad M = \max_{m \in [a;b]} f(x)$$

Allora $\forall z$, con $m \le z \le M$, esiste un punto $c \in [a;b]$, tale che $f(c) = z$



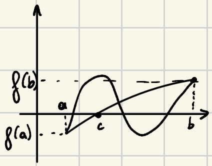


c non è obbligatoriamente unico

3) Teorema (degli zeri)

$f:[a;b] \to \mathbb{R}$ continua con $f(a)\cdot f(b)<0$. Allora $\exists\, c \in (a;b)$ tale che $f(c)=0$.

Se f è strettamente monotona, allora c è unico.



09-10-2024 (Andreano) SUCCESSIONI PER RICORRENZA

Una successione è definita per ricorrenza se

Fibonacci:

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = 1 \\ a_m = a_{m-1} + a_{m-2} \quad \forall m \geq 2 \end{cases}$$

$a_m = \frac{1}{m} \to$ forma chiusa

Esempio

$$\begin{cases} a_0 = 2 \\ a_m = 5a_{m-1} \end{cases}$$

$$\underbrace{2}_{a_0}, \underbrace{5 \cdot 2}_{a_1}, \underbrace{5 \cdot 5 \cdot 2}_{a_2}, \underbrace{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 2}_{a_3}$$

$\Rightarrow a_m = 2 \cdot 5^m$

Successioni in $\mathbb{R}^m$:

$$\underline{x}_K = \begin{bmatrix} x_{1,K} \\ x_{2,K} \\ \vdots \\ x_{m,K} \end{bmatrix}, \quad K \in \mathbb{N}$$

Def: Una successione $\underline{x}_K \in \mathbb{R}^m$ converge a $\underline{L} \in \mathbb{R}^m$ se $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{K} \in \mathbb{N}$ tale che $\forall K \geq \bar{K} \ \ \|\underline{x}_K - \underline{L}\| < \varepsilon$

Oss:

$$\|\underline{x}_K - \underline{L}\| = \sqrt{(x_{1,K} - L_1)^2 + (x_{2,K} - L_2)^2 + \ldots + (x_{m,K} - L_m)^2} \xrightarrow[\text{se } K \to +\infty]{} 0$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x_{1,K} \to L_1 \\ x_{2,K} \to L_2 \\ \vdots \\ x_{m,K} \to L_m \end{cases}$$

Esempio

Sia $\underline{x}_K = \begin{bmatrix} e^{\frac{1}{K}} \\ \frac{3K-1}{K^2} \\ \frac{(-1)^K}{K} \\ 3 + \ln\left(1 + \frac{1}{K}\right) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4}$

$$\lim_{K \to +\infty} \underline{x}_K = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$\lim_{K \to +\infty} \frac{a_K}{b_K} = 0 \qquad m \leq a_K \leq M, \ b_K \to \pm\infty \qquad \underbrace{-\frac{1}{K}}_{\to 0} \leq \frac{(-1)^K}{K} \leq \underbrace{\frac{1}{K}}_{\to 0}$

Def: Una successione è definita per ricorrenza se viene assegnato il 1° termine (o i primi termini) e una formula per calcolare l'm-esimo termine conoscendo l'(m-1)-esimo termine.

Serie esponensiale

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{x^m}{m!} = e^x, \ \forall x \in \mathbb{R}$$

In particolare

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{m!} = e$$

Esercizio:

$$\sum_{m=2}^{+\infty} \frac{1}{m!} = ?$$

$$\sum_{m=2}^{+\infty} \frac{1}{m!} = \underbrace{\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{m!}}_{e} - 1 - 1 = e - 2$$

TEOREMA:

Se una serie $\sum_{m=0}^{+\infty} a_m$ converge assolutamente $\Rightarrow$ la serie converge

$\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{m-5}{m^2+1}$ e' definitivamente a termini positivi

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(m)}{m^2}$$

Si studia la convergenza assoluta:

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \left| \frac{\operatorname{sen}(m)}{m^2} \right| = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{|\operatorname{sen}(n)|}{m^2}$$

$|\operatorname{sen} m| \leq 1$

$\Rightarrow \frac{|\operatorname{sen} n|}{m^2} \leq \frac{1}{m^2}$

$\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^2}$ e' una serie armonica generalizzata con esponente $>1 \Rightarrow$ converge

Per il criterio del confronto, $\sum \frac{|\operatorname{sen} m|}{m^2}$ converge $\Rightarrow \sum \frac{\operatorname{sen} m}{m^2}$ converge assolutamente $\Rightarrow$ converge

Oss: Ci sono serie che divergono assolutamente, ma convergono semplicemente

Esempio: $\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{m} = \ln 2$

ma $\sum_{m=1}^{+\infty} \left| \frac{(-1)^m}{m} \right| = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m}$ diverge

Limiti e continuità:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \in \overline{\mathbb{R}}$$

$\iff \forall x_m \in \text{dom}(f),\ x_m \neq x_0$ e $x_m \to x_0$ per $m \to +\infty$ $\quad \lim_{m \to +\infty} f(x_m) = L$

Teorema (algebra dei limiti):

Siano $f, g : A \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ e sia $\underline{x}_0 \in \mathbb{R}^m$ punto di accumulazione di A

Se $\lim_{\underline{x} \to \underline{x}_0} f(\underline{x}) = L \in \overline{\mathbb{R}}$

$\lim_{\underline{x} \to \underline{x}_0} g(\underline{x}) = M \in \overline{\mathbb{R}}$

Allora:

(1) $\lim_{\underline{x} \to \underline{x}_0} (f(\underline{x}) + g(\underline{x})) = L + M$ (a meno che si ottenga $+\infty - \infty$ o $-\infty + \infty$)

(2) $\lim_{\underline{x} \to \underline{x}_0} f(\underline{x}) \cdot g(\underline{x}) = L \cdot M$ (a meno che si ottenga $0 \cdot \pm\infty$ o $\pm\infty \cdot 0$)

(3) $\lim_{\underline{x} \to \underline{x}_0} \frac{f(\underline{x})}{g(\underline{x})} = \frac{L}{M}$ (a meno che si ottenga $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ o $\frac{L}{0}$)

Dim:

Solo (1) nel caso $L \in \mathbb{R}, M \in \mathbb{R}$

Siano $\lim_{\underline{x} \to \underline{x}_0} f(\underline{x}) = L$ e $\lim_{\underline{x} \to \underline{x}_0} g(\underline{x}) = M$

$\forall \underline{x}_K \to \underline{x}_0,\ \underline{x}_K \in A,\ \underline{x}_K \neq \underline{x}_0$

$\lim_{K \to +\infty} f(\underline{x}_K) = L$ e $\lim_{K \to +\infty} g(\underline{x}_K) = M$

Per il teorema sulla somma dei limiti di successioni,

$$\lim_{K \to +\infty} (f(\underline{x}_K) + g(\underline{x}_K)) = L + M \iff \lim_{\underline{x} \to \underline{x}_0} (f(\underline{x}) + g(\underline{x})) = L + M \quad \square$$

Def: Date $f, g : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $g(x) \neq 0$ in un intorno $U(x_0)$ = intorno di x_0 con $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ punto di accumulazione di A

se $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ si dice che $f(x) = o(g(x))$ per $x \to x_0$

se $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, si dice che $f(x) \sim g(x)$ per $x \to x_0$
(è asintetico)

Esempi:

Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = \pm \infty$

$f(x) = o(g(x))$ per $x \to x_0 \iff \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

Quindi se si confrontano due infiniti, quello trascurabile (cioè l'o-piccolo) è l'infinito più lento.

Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$

$f(x) = o(g(x))$ per $x \to x_0$

$\iff \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

11 - 10 - 2024

Teorema (degli zeri)

$f: [a;b] \to \mathbb{R}$, continua su $[a;b]$ con $f(a) \cdot f(b) < 0$. Allora $\exists c \in (a;b)$ tale che $f(c) = 0$.
Se f è strettamente monotona, c è unico.

Equilibrio di mercato

$D(p)$ funzione di domanda

$O(p)$ funzione di offerta

Prezzo di equilibrio: p^* tale che $D(p^*) = O(p^*)$

Teorema (Esistenza degli equilibri di mercato)

Siano $D: [a;b] \to \mathbb{R}$ e $O: [a;b] \to \mathbb{R}$ continue tali che $D(a) > O(a)$ e $D(b) < O(b)$.
Allora, se D è strettamente decrescente e O è strettamente crescente, p^* è unico.

Dim (NO STUDIO)

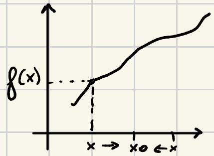
$H(p) = D(p) - O(p)$.

Hp del teorema degli zeri
$$\begin{cases} H: [a,b] \to \mathbb{R} \\ H \text{ è continua} \\ H(a) = D(a) - O(a) > 0 \\ H(b) = D(b) - O(b) < 0 \end{cases}$$

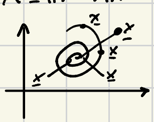
Per il teorema degli zeri $\exists p^* \in (a;b)$ tale che $H(p^*) = 0 \iff D(p^*) = O(p^*)$
Se D è strett decrescente e O è strett crescente, $H(p) = \underbrace{D(p)}_{\text{strett dec}} \underbrace{- O(p)}_{\text{strett decres}}$. $H(p)$ è somma di funzioni strett decr. e quindi è strett decr $\Rightarrow p^*$ è unico

Limiti di $f: A \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$

Def. $f: A \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $\underline{x}^0 \in A'$.
Si dice che $\lim_{\underline{x} \to \underline{x}^0} f(\underline{x}) = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ quando $\forall U(\ell)$, $\exists V(\underline{x}^0)$ tale che $f(\underline{x}) \in U(\ell)$, $\forall \underline{x} \in V(\underline{x}^0) \cap A$, con $\underline{x} \neq \underline{x}^0$

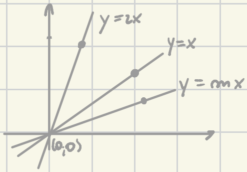


$f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$



Esempio $f(x;y) = \frac{y}{x}$; $\underline{x}^0 = (x_0; y_0) = (0;0)$

$$\lim_{(x;y)\to(0;0)} f(x;y) = \lim_{(x;y)\to(0;0)} \frac{y}{x} \quad \nexists$$



$y = 2x$

$f(x;y) = f(x;2x) = \frac{2x}{x} = 2$

$\lim_{x\to 0} f(x;2x) = \lim_{x\to 0} 2 = 2$

$y = x$; $f(x;y) = f(x;x) = \frac{x}{x} = 1$

$\lim_{x\to 0} f(x;x) = \lim_{x\to 0} 1 = 1$

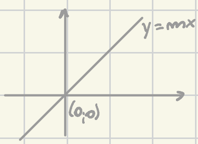
$y = mx$; $f(x;y) = f(x;mx) = \frac{mx}{x} = m$

$\lim_{x\to 0} f(x;mx) = \lim_{x\to 0} m = m.$

Esempio

$f(x;y) = \frac{x^2}{y}$; $\underline{x}^0 = (0;0)$

$$\lim_{(x;y)\to(0;0)} f(x;y) = \lim_{(x;y)\to(0;0)} \frac{x^2}{y}.$$



$y = mx$; $f(x;y) = f(x;mx) = \frac{x^2}{mx} = \frac{x}{m}$

$\lim_{x\to 0} f(x;mx) = \lim_{x\to 0} \frac{x}{m} = 0, \ \forall m.$

$y = x^2$; $f(x;y) = f(x;x^2) = \frac{x^2}{x^2} = 1$

$\lim_{x\to 0} f(x;x^2) = \lim_{x\to 0} 1 = 1$

Esempio $f(x;y) = \frac{e^{xy}-1}{xy}$

$$\lim_{(x;y)\to(0;0)} \frac{e^{xy}-1}{xy}$$

$z = x \cdot y$

$(x;y) \to (0;0);\ z \to 0$

$$\lim_{z\to 0} \frac{e^{z}-1}{z} = 1$$

Def (f continua)

$f: A \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$; $\underline{x}^0 \in A \cap A'$

Si dice che f è continua in $\underline{x}^0$ quando

$$\lim_{\underline{x}\to\underline{x}^0} f(\underline{x}) = f(\underline{x}^0)$$

Se $\underline{x}^0$ è punto isolato di A ; f è continua per definizione in $\underline{x}^0$.

Esempio $f(x;y) = \begin{cases} \frac{x^2}{y}, & \forall (x;y) \in \mathbb{R}^2 \text{ con } y \neq 0 \\ 0 & \forall (x;0), x \in \mathbb{R} \end{cases}$

f è continua in $(0;0)$? NO

NB Se f è continua in ogni punto del dominio, allora si dice continua.

TEOREMA (di Weiestrass)

Se $f: A \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ è continua e A è compatto, allora f ammette un max e min assoluto.

FUNZIONI COERCIVE E SUPERCOERCIVE

$f: A \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$

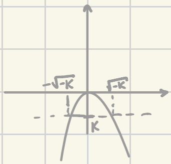
$L_K = \{ \underline{x} \in A : f(\underline{x}) \geq K \}$; insiemi di sopralivello.

Def. (f coercive).

$f: A \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ si dice coerciva su un sottoinsieme C di A, quando $\exists K \in \mathbb{R}$ tale che l'insieme $L_K \cap C = \{ \underline{x} \in C : f(\underline{x}) \geq K \}$ è non vuoto e compatto. Se $C = A$, f si dice coerciva su A.

Esempio

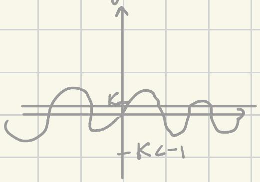
1) $f(x) = -x^2$
$A = \mathbb{R}$



$$L_K = \{ x \in \mathbb{R} : -x^2 \geq K \} = \begin{cases} \emptyset, \text{ se } K > 0 \\ [-\sqrt{-K} ; \sqrt{-K}], \ K < 0 \end{cases}$$

f è coerciva.

2) $f(x) = \operatorname{sen} x \ ; \ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

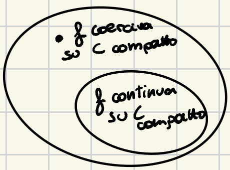


f non coerciva (su A)

$C = [0 ; 10)$

f è coerciva su C

TEOREMA Se $f : A \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ è continua su un insieme compatto $C \subseteq A$, allora f è coerciva su C.

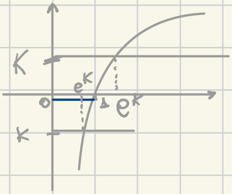


TEOREMA $f : A \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ continua e $g : B \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ strettamente crescente, con $\operatorname{Imm} f \subseteq B$. Se f è coerciva su un insieme chiuso C, anche $g(f)$ lo è.

Esempio $f(x) = -x^2$ coerciva su $A = \mathbb{R}$ ma A non è compatto

Esempio $f(x) = \begin{cases} \log x, \ x > 0 \\ 0, \ x = 0 \end{cases}$

$C = [0 ; 1]$



$L_K \cap C = \{ x \in C : f(x) \geq K \}$

$K > 0 ; \ \log x \geq K ; \ x \geq e^K ;$

$L_K \cap C = \emptyset$

$K < 0 ; \ \log x \geq K ; \ x \geq e^K ; \ L_K \cap C = [e^K ; 1] \cup \{0\}$. compatto

Teorema (di Tonelli)

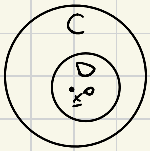
1) $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ coerciva e continua su $C \subseteq A$. Allora f ammette un punto di massimo $\underline{x}^0 \in C$

2) Se inoltre C è chiuso, allora

$$\underset{\underline{x} \in C}{\operatorname{argmax}} f(\underline{x}) \text{ è un insieme chiuso}$$

Dim 1)

Per Hp f è coerciva su C. Quindi $\exists K \in \mathbb{R}$ tale che $L_K \cap C = D$ è non vuoto e compatto
Per Hp f è continua su C e quindi anche su D. Quindi per il teorema di Weistrass
$\exists\, \underline{x}^0 \in D$ tale che $f(\underline{x}^0) \geq \underbrace{f(\underline{x})}_{K}; \ \forall\, x \in D$



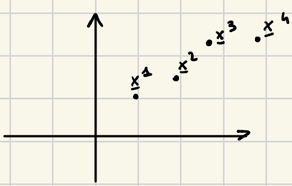
Se $\underline{x} \in C - D$, allora $\underline{x} \notin L_K$, ossia $f(\underline{x}) < K$.

Si ha $\underset{\substack{\text{perché} \\ \underline{x}^0 \in D}}{f(\underline{x}^0) \geq K} > f(x), \ \forall\, \underline{x} \in C - D$

Pertanto $f(\underline{x}^0) \geq f(x), \ \forall\, \underline{x} \in C$ cioè $f(x_0) = \max\limits_{x \in C} f(x)$

Funzioni Supercoercive

Def. $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è supercoerciva quando $\|\underline{x}^m\| \to +\infty \Rightarrow f(\underline{x}^m) \to -\infty$, $\forall$ successione $\underline{x}^m \in \mathbb{R}^n$.



Esempio $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$;

$$f(x_1; x_2) = -x_1^2 - x_2^2 = -(x_1^2 + x_2^2) = -\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right)^2 = -\|\underline{x}\|^2$$

Se $\|\underline{x}^m\| \to +\infty$; $f(\underline{x}^m) = -\|\underline{x}^m\|^2 = -\infty$. Quindi f è supercoerciva

Esempio: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f(x) = -x^2$. Se $|x_m| \to +\infty$ ($x_n \to +\infty$; $x_m \to -\infty$). Quindi $f(x_m) = -(x_m)^2$ è supercoerciva

Esempio: $f(x) = x^2$; $f(x_m) = (x_m)^2 \to +\infty$. Quindi f non è supercoerciva.

TEOREMA

Sia $f: A \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ continua in un insieme chiuso C. Se f è supercoercivo su C, allora f è coerciva su C.
Inoltre, gli insiemi $L_K \cap C$ sono compatti, $\forall K \in \mathbb{R}$

TEOREMA di unicità del limite (H)

Sia $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in A'$. Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$, $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$, allora ℓ è unico.

<u>Dim</u> Supponiamo, per assurdo che esistano due limiti diversi ℓ_1 e ℓ_2 con $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$ (la dimostrazione nel programma è richiesta solo nel caso di limiti finiti). Senza perdita di generalità supponiamo $\ell_1 > \ell_2$.
Pertanto supponiamo per assurdo che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell_1$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell_2$$

$$\ell_1 > \ell_2.$$

Per la definizione di limite:

$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell_1 \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists U_1(x_0)$ tale che $f(x) \in (\ell_1 - \varepsilon; \ell_1 + \varepsilon)$,

$\forall x \in U_1(x_0) \cap A$, $x \neq x_0$.

$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell_2 \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists U_2(x_0)$ tale che $f(x) \in (\ell_2 - \varepsilon, \ell_2 + \varepsilon)$, $\forall x \in U_2(x_0) \cap A$,

$x \neq x_0$.

Consideriamo $\varepsilon > \frac{\ell_1 + \ell_2}{2}$ (tanto possiamo essendo $\forall \varepsilon > 0$)

Per $\ell_1 - \varepsilon > \ell_2 + \varepsilon$, ossia $\underbrace{\varepsilon < \frac{\ell_1 - \ell_2}{2}}_{\lightning}$, si ha $(\ell_2 - \varepsilon; \ell_2 + \varepsilon) \cap (\ell_1 - \varepsilon, \ell_1 + \varepsilon) = \emptyset$ che è ASSURDO

$\square$ C.V.D.

TEOREMA (Criterio del confronto)

Siano $f, g, h: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in A'$. Se $g(x) \leq f(x) \leq h(x) = \ell \in \mathbb{R}$, $\forall x \in A$ e $\lim_{x \to x_0} g(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = \ell \in \mathbb{R}$ allora $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$

<u>Dim</u>

Sia $\varepsilon > 0$. Dobbiamo mostrare che $\exists \delta > 0$ tale che $f(x) \in (\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon)$, $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap A$, $x \neq x_0$

Poniamo $V_\varepsilon(\ell) = (\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon)$

$U_\delta(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

Siccome $\lim_{x \to x_0} g(x) = \ell$, $\exists \delta_1 > 0$ tale che

1) $\ell - \varepsilon < g(x) < \ell + \varepsilon$, $\forall x \in U_{\delta_1}(x_0) \cap A$, $x \neq x_0$.

Siccome $\lim_{x \to x_0} h(x) = \ell$, $\exists \delta_2 > 0$ tale che

2) $\ell - \varepsilon < h(x) < \ell + \varepsilon$, $\forall x \in U_{\delta_2}(x_0) \cap A$, $x \neq x_0$

Per $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ valgono entrambe le disuguaglianze 1) e 2). Pertanto si ha

$$\ell - \varepsilon < g(x) \leq f(x) \leq h(x) < \ell + \varepsilon, \quad \forall x \in U_\delta(x_0) \cap A, \ x \neq x_0$$

ossia $f(x) \in V_\varepsilon(\ell)$, $\forall x \in U_\delta(x_0) \cap A$, $x \neq x_0$.

Siccome ε è arbitrario si conclude che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$$

$\square$ CVD

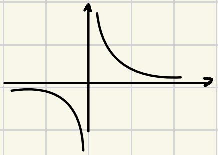
15-10-2024 con Andreano

INTORNO BUCATO (intorno a ciambella)

$0 < \|\underline{x} - \underline{x}_0\| < \delta_\varepsilon$

$B_{\delta_\varepsilon}(\underline{x}_0) \setminus \{\underline{x}_0\}$

Se f è strettamente monotona $\Rightarrow$ f è iniettiva (invertibile)



$f(x) = \frac{1}{x}$ è iniettiva ma non è strettamente monotona

Proposizione

Sia $f: I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, con I intervallo, continua in I. Allora f invertibile $\Leftrightarrow$ f è strett. monotona

Proposizione

Sia $f: A \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ f è supercoerciva $\Leftrightarrow$ $(f \geq t)$ sono limitati $\forall t \in \mathbb{R}$

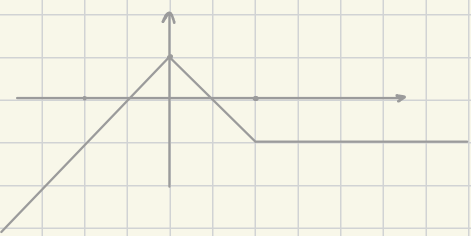
Esempio

Sia $f(x) \begin{cases} -|x|+1 & \text{se } x \leq 2 \\ -1 & \text{se } x > 2 \end{cases}$

$\exists$ LK illimitati $\longrightarrow$ non è supercoerciva

$(f \geq t) = \{x \in A : f(x) \geq t\}$

è coerciva? È supercoerciva?



$f(\underline{x}) = -\|\underline{x}\|$

$\|\underline{x}_K\| \to +\infty$

$\Rightarrow f(\underline{x}_K) = -\|\underline{x}_K\| \to -\infty$

$f(x,y) = -(x-y)^2$ è supercoerciva?

$\underline{x}_K = \begin{bmatrix} K \\ K \end{bmatrix}$

$\|\underline{x}_K\| = \sqrt{K^2+K^2} = \sqrt{2K^2} = \sqrt{2}K \quad \to +\infty$

ma $f(K,K) = -(K-K)^2 = 0 \not\to -\infty$ non è supercoerciva

$f(x,y) = -(x^2+y^2) = -\|\underline{x}\|^2$

Limiti Notevoli

Se $f(x) \to 0$ per $x \to x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\operatorname{sen} f(x)}{f(x)} = 1 \iff \operatorname{sen} f(x) \sim f(x) \text{ per } x \to x_0$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1-\cos f(x)}{[f(x)]^2} = \frac{1}{2} \iff 1-\cos f(x) \sim \frac{1}{2}[f(x)]^2$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\tan f(x)}{f(x)} = 1 \iff \tan f(x) \sim f(x)$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\arctan f(x)}{f(x)} = 1 \iff \arctan f(x) \sim f(x)$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{e^{f(x)}-1}{f(x)} = 1 \iff e^{f(x)}-1 \sim f(x)$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\ln(1+f(x))}{f(x)} = 1 \iff \ln(1+f(x)) \sim f(x)$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{(1+f(x))^{\alpha}-1}{f(x)} = \alpha \iff (1+f(x))^{\alpha}-1 \sim \alpha f(x)$$

Esercizi

(1) $$\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}\sqrt{x} + e^{x^2} - 1}{\ln(1-4x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x} + x^2 + o(\sqrt{x})}{-4x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}}{-4x} = \lim_{x\to 0^+} -\frac{1}{\underbrace{4\sqrt{x}}_{\to 0^+}} = -\infty$$

(2) $$\lim_{x\to +\infty} \frac{\overbrace{\operatorname{sen}\sqrt{x}}^{o(e^{x^2})} + e^{x^2} \overbrace{-1}^{o(e^{x^2})}}{\ln(\underbrace{1}_{o(4x)} + 4x)} = \lim_{x\to +\infty} \frac{e^{x^2}}{\ln(4x)} = +\infty$$

(3) $$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x^3 + 1 - \cos x^2}{3x^3 + \ln(1+\frac{x}{2})} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3 + \overbrace{\tfrac{1}{2}x^4}^{o(x^3)}}{\underbrace{3x^3}_{=\,o(\frac{x}{2})} + \frac{x}{2}} = \lim_{x\to 0} \frac{x^{\cancel{3}2}}{\frac{x}{2}} = \lim_{x\to 0} 2x^2 = 0$$

(4) $$\lim_{x\to 1} \frac{\operatorname{sen}(x-1) + (x-1)^4}{e^{x-1} - 1 + \tan(x-1)^6} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1) + \overbrace{(x-1)^4}^{o(x-1)}}{(x-1) + \underbrace{(x-1)^6}_{o(x-1)}} = \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x-1} = 1$$

Siano $0 \le a_n \le b_n$ e sia $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ divergente

Allora sicuramente:

(1) $\lim_{n\to+\infty} b_n = +\infty$

(2) $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge

~~(3)~~ se S_n è la successione delle somme parziali di $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ $\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$

(4) $\lim_{n\to+\infty} b_n \neq 0$

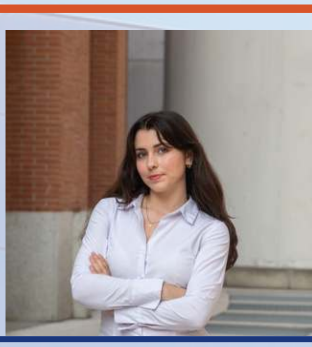
In generale, due funzioni che hanno lo stesso limite per $x \to x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, non sono necessariamente asintotiche per $x \to x_0$.

PER DUBBI O SUGGERIMENTI SULLA DISPENSA

ALESSIA BRONGO

alessia.brongo@studbocconi.it
@_.alessiabrongo._
+39 3662497117

PER INFO SULL'AREA DIDATTICA



NICOLA COMBINI

nicola.combini@studbocconi.it
@nicolacombini
+39 3661052675

MARTINA PARMEGIANI

martina.parmegiani@studbocconi.it
@martina_parmegiani05
+39 3445120057

MARK OLANO

mark.olano@studbocconi.it
@mark_olano._
+39 3713723943

TEACHING DIVISION

I NOSTRI PARTNERS

Wall Street English®

TEGAMINO'S

ETHAN SUSTAINABILITY

700+ CLUB

LA PIADINERIA

LA PIADINERIA dal 1994