CLEAM

A.A. 2025/2026

B.LAB

DISPENSA

MATEMATICA (MODULO 1)

-SECONDO PARZIALE-

SCRITTA DA

ALESSIA BRONGO

TEACHING DIVISION

Questa dispensa è scritta da studenti senza alcuna intenzione di sostituire i materiali universitari.

Essa costituisce uno strumento utile allo studio della materia, ma non garantisce una preparazione altrettanto esaustiva e completa al fine del superamento dell'esame quanto il materiale consigliato dall'università.

Il contenuto potrebbe contenere errori e non è stato in alcun modo rivisto né approvato dai docenti. Si consiglia di utilizzarlo come supporto integrativo, da affiancare in ogni modo alle fonti e materiali ufficiali indicate nei programmi d'esame.

Appunti Mate 1 - Secondo parziale

Seguono gli appunti presi in classe di Mate 1 - secondo parziale, riguardanti questi macroargomenti:

- Calcolo differenziabile con una variabile;
- Calcolo differenziabile con n variabili;
- Spazi vettoriali e Matrici;
- Funzioni e Sistemi lineari.

In grigio: esercizi, esempi, chiarimenti passaggi.

Calcolo differenziabile con una variabile

05/11/2024

Calcolo differenziale in una variabile

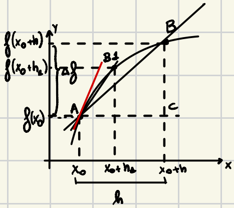
$f:(a;b)\to\mathbb{R}$

$x_0\in(a;b)$

$f(x_0)\quad x_0+h$

$\Delta f=f(x_0+h)-f(x_0)$

$h\to 0$



$\frac{\Delta f}{h}=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ = rapporto incrementale

$\frac{\Delta f}{h}=\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$ = coeff. angolare della retta che passa per A e B.

$\lim_{h\to 0}\frac{\Delta f}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ = coeff. angolare della retta tg al grafico di f. nel punto A.

Significato geometrico di derivata

La derivata prima in un punto x_0 è il coefficiente angolare della tangente alla curva nel punto x_0

$\Rightarrow f'(x_0)\to m$ tangente in x_0

Definizione (derivata prima in un punto)

Def: $f:(a;b)\to\mathbb{R}$; $x_0\in(a;b)$

Si dice derivata di f nel punto x_0, il limite

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h},$$

se esiste finito.

Ricordiamo che il rapporto incrementale è la pendenza della secante AB

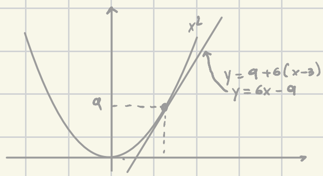
N.B. La retta tangente è la posizione limite della retta secante quando il punto B si avvicina a A $(h\to 0)$

In questo caso il valore del limite lo indichiamo con $\underbrace{f'(x_0)}_{\text{Cauchy}}$ $\left(\underbrace{\frac{df}{dx}(x_0)}_{\text{Leibniz}};\ \underbrace{\dot{f}(x_0)}_{\text{Newton}}\right)$

Esempio

$f(x)=x^2\quad x_0=3$

$f'(3)=\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(3+h)^2-9}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{9+h^2+6h-9}{h}=\lim_{h\to 0}(h+6)=6$



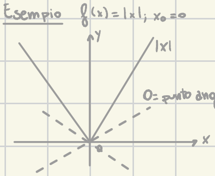
Come calcolare la retta tang.

$(x_0;y_0)$; $m\in\mathbb{R}$; $y=y_0+m(x-x_0)$

$(x_0;f(x_0))$; $\underbrace{y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)}_{\text{retta tangente}}$

N.B. Se il limite $\exists$ finito si dice che f è derivabile in x_0.

Esempio $f(x)=|x|$; $x_0=0$



Per vedere se la derivata esiste o non esiste

$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{|h|-0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{|h|}{h}$

$|h|=\begin{cases}h, & h>0\\ -h, & h<0\end{cases}$

$\lim_{h\to 0}\frac{|h|}{h}=\begin{cases}\lim_{h\to 0^+}\frac{h}{h}=1\\ \lim_{h\to 0^-}\frac{-h}{h}=-1\end{cases}$

Definizione derivata destra

$f:(a;b)\to\mathbb{R},\ x_0\in(a;b)$

Si dice derivata destra di f nel punto x_0, il limite

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

se $\exists$ finito. (indicata con $f'_+(x_0)$)

Definizione derivata sinistra

$f:(a;b)\to\mathbb{R},\ x_0\in(a;b)$

Si dice derivata sinistro di f nel punto x_0, il limite

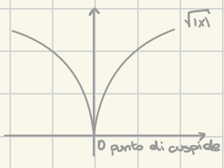
$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

se $\exists$ finito. (indicata con $f'_-(x_0)$)

<u>Esempio</u> $f(x)=\sqrt{|x|}$, $x_0=0$

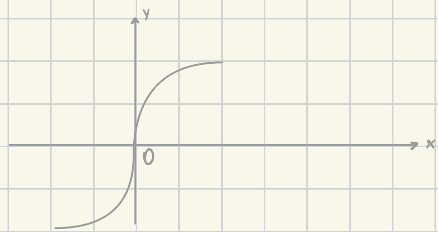
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{|h|}}{h}=\begin{cases}\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{\sqrt{h}}{h}=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{1}{\sqrt{h}}=\dfrac{1}{0^+}=+\infty\\[2ex]\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{-\sqrt{-h}}{-h}=\lim\limits_{h\to 0^-}-\dfrac{1}{\underbrace{\sqrt{-h}}_{\to 0^+}}=-\dfrac{1}{0^+}=-\infty\end{cases}$$

Non esistono né la derivata destra né la sinistra



$f(x)=\sqrt[3]{x}$, $x_0=0$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{h}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^{\frac{1}{3}}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^{\frac{2}{3}}}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{\underbrace{h^2}_{\to 0^+}}}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$



<u>Esempio</u>

$$f(x)=\begin{cases}x\,\text{sen}\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}\quad ;\ x_0=0$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h\,\text{sen}\frac{1}{h}}{h}=\begin{cases}\lim\limits_{h\to 0^+}\text{sen}\overbrace{\dfrac{1}{h^+}}^{\to+\infty}\ \nexists\\[2ex]\lim\limits_{h\to 0^-}\text{sen}\overbrace{\dfrac{1}{h^-}}^{\to-\infty}\ \nexists\end{cases}$$

Funzione derivata

$f:(a;b)\to\mathbb{R},\ x\in(a;b)$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

se $\exists$ finito.

Esempio $f(x)=x^2;\ f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{x^2}+h^{\cancel{2}}+2x\cancel{h}-\cancel{x^2}}{\cancel{h}}=\lim_{h\to 0}(h+2x)=2x\quad f'(x)=2x$

Tabella delle derivate delle funzioni elementari

1) $f(x)=e;\ f'(x)=0$

2) $f(x)=x^q;\ f'(x)=qx^{q-1}$

3) $f(x)=a^x;\ f'(x)=a^x\log a$

4) $f(x)=e^x;\ f'(x)=e^x$

5) $f(x)=\log_a x;\ f'(x)=\frac{1}{x\log a}$

6) $f(x)=\overbrace{\log x}^{\ln x};\ f'(x)=\frac{1}{x}$

7) $f(x)=\cos x;\ f'(x)=-\operatorname{sen} x$

8) $f(x)=\operatorname{sen} x;\ f'(x)=\cos x$

9) $f(x)=\operatorname{tg} x;\ f'(x)=\frac{1}{(\cos x)^2}$

Ricorda: X il prof $\log a=\ln x$
$\operatorname{Log} a=\log a=\log_{10} a$
$\log_a x=\log_a x$

10) $y=\operatorname{cotg} x\ \to\ y'=-\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}$

11) $y=\operatorname{arcsen} x\ \to\ y'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

12) $y=\arccos x\ \to\ y'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

13) $y=\operatorname{arctg} x\ \to\ y'=\frac{1}{1+x^2}$

14) $y=\operatorname{arccotg} x\ \to\ y'=-\frac{1}{1+x^2}$

15) $y=x^x=e^{x\ln x}\ \to\ y'=x^x(\ln x+1)$

Algebra delle derivate

1) $(c\cdot f)'(x)=c\cdot f'(x)$

Esempio $f(x)=3\cdot x^4;\ f'(x)=3\cdot 4x^3=12x^3$

2) $(f+g)'(x)=f'(x)+g'(x)$

3) $(f\cdot g)'(x)=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$.

Esempio $f(x)=x^2\log x \to \ln x$

$f'(x)=2x\cdot\log x+x^2\cdot\frac{1}{x}=2x\log x+x$

4) $\left(\frac{f}{g}\right)'(x)=\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{(g(x))^2}$ con $g(x)\neq 0$.

Esempio $f(x)=\frac{x^2}{e^x}\qquad f'(x)=\frac{2xe^x-x^2e^x}{(e^x)^2}=\frac{2x-x^2}{e^x}$

Esempio

$f(x)=x^2e^x\log x$

$f'(x)=2xe^x\log x+e^x\cdot x^2\cdot\log x+\frac{1}{x}x^2e^x=2xe^x\log x+e^xx^2\log x+xe^x=xe^x=(2\log x+x\log x+1)$.

TEOREMA DELLA SOMMA

$f, g : (a;b) \to \mathbb{R}$, derivabili in $x \in (a;b)$

allora

$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$

Dim $(f+g)'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(f+g)(x+h)-(f+g)(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)+g(x+h)-f(x)-g(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} = f'(x)+g'(x)$

DERIVATE DI UNA FUNZIONE COMPOSTA.

$g(h(x))$

Teorema Siano g e h funzioni derivabili e tali da poter conservare la funzione composta.

$f(x) = g(h(x))$.

allora $f(x)$ è derivabile e si ha:

$f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x)$

Esempio $f(x) = e^{x^2}$

$g(x) = e^x$; $h(x) = x^2$

$(g(h(x)) = e^{h(x)} = e^{x^2} = f(x)$

$f'(x) = e^{x^2} \cdot 2x$

$g'(x) = e^x$; $g'(h(x)) = e^{h(x)} = e^{x^2}$

$h'(x) = 2x$

N.B. $f(x) = e^{h(x)}$

$f'(x) = e^{h(x)} \cdot h'(x)$

Esempio $f(x) = \log(1+x^2)$; $f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \cdot 2x = \frac{2x}{1+x^2}$

$g(x) = \log x$; $h(x) = 1+x^2$

$g(h(x)) = \log(h(x)) = \log(1+x^2) = f(x)$

$g'(x) = \frac{1}{x}$; $g'(h(x)) = \frac{1}{h(x)} = \frac{1}{1+x^2}$; $h'(x) = 2x$

N.B. $f(x) = \log(h(x))$ $\quad \ln(h(x))$

$f'(x) = \frac{h'(x)}{h(x)}$

Esempio $f(x) = \log|x|$

$$f(x) = \begin{cases} \log x, & x>0 \\ \log(-x), & x<0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x>0 \\ \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}, & x<0 \end{cases}$$

$f(x) = \log|x|$; $f'(x) = \frac{1}{x}$

Esempio $f(x) = (e^x+1)^2$

$g(x) = x^2$; $h(x) = e^x+1$

$g(h(x)) = (h(x))^2 = (e^x+1)^2 = f(x)$

$g'(x) = 2x$

$g'(h(x)) = 2h(x) = 2(e^x+1)$

$h'(x) = e^x$

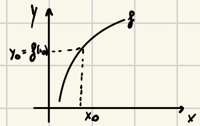
$f'(x) = 2(e^x+1)\, e^x$

N.B. $f(x) = [h(x)]^\alpha$

$f'(x) = \alpha\, [h(x)]^{\alpha-1} \cdot h'(x)$

DERIVATA DELLA FUNZIONE INVERSA

f invertibile e derivabile in x_0 ; f^{-1}



$f'(x_0)$

TEOREMA $f:(a;b) \to \mathbb{R}$ invertibile e derivabile in $x_0 \in (a;b)$ con $f'(x) \neq 0$. Allora f^{-1} è derivabile in $y_0 = f(x_0)$ e si ha:

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Esempio

$f(x) = x + e^x$, Calcolare $(f^{-1})'$ nel punto $y_0 = 1$.

$\cancel{x + e^x = y}$ $\quad (f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{2}$

$f(0) = 1 = y_0$; $f'(x) = 1 + e^x$; $f'(0) = 2$

DERIVATA DI UNA COSTANTE (H)

Consideriamo una funzione $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, con $f(x) = K$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Allora si ha, $\forall h \neq 0$:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{K-K}{h} = 0$$

e quindi $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = 0$.

TEOREMA (derivata di una funzione esponenziale) - H

La funzione esponenziale $f(x) = a^x$, con $a>0$ è derivabile $\forall x \in \mathbb{R}$ con

$$f'(x) = a^x \log a$$

DIM Si ha:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a^{x+h}-a^x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a^x(a^h-1)}{h} = a^x \lim_{h\to 0} \frac{a^h-1}{h} = a^x \log a$$

siccome $\lim_{h\to 0} \frac{a^h-1}{h} = \log a$.

TEOREMA (derivate della funzione logaritmica) - H

Se $f(x) = \log x$, allora $f'(x) = \frac{1}{x}$.

DIM. Se consideriamo la funzione $f(x) = e^x$, si ha $f^{-1}: (0;+\infty) \to \mathbb{R}$, $f^{-1}(y) = \log y$.

Pertanto:

$$[f^{-1}]'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{e^{\log y}} = \frac{1}{y}.$$

TEOREMA (derivata di una funzione potenza). - H

Se $f(x) = x^a$, $a \in \mathbb{R}$, allora

$$f'(x) = a x^{a-1}, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

DIM. Si ha: $x^a = e^{\log x^a} = e^{a \log x}$.

Ponendo $f(x) = e^x$ e $g(x) = a \log x$, si ottiene $(x^a)' = f'(g(x)) \cdot g'(x) = e^{a\log x} \cdot \frac{a}{x} = x^a \cdot \frac{a}{x} = a \cdot x^{a-1}$.

TEOREMA (Derivata di arctan x) - H

La derivata di $\arctan x$ è $\frac{1}{1+x^2}$

DIM. Sia $f: [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \tan x$.

Si ha $f^{-1}: \mathbb{R} \to [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$, $f^{-1}(y) = \arctan y$.

Sappiamo che $f'(x) = (1+\tan x)^2 = 1+y^2$ e quindi, $\forall y \in \mathbb{R}$ $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{1+y^2}$.

06/11/2024

DERIVABILITÀ e CONTINUITÀ

Continuità in x_0

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

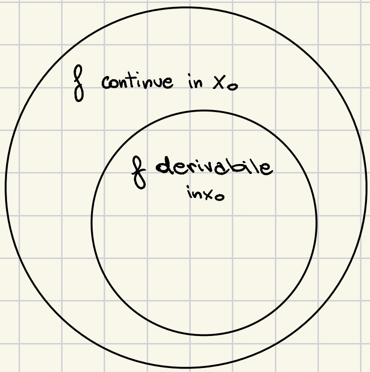
Derivabilità in x_0

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \quad \exists \text{ finito}$$

TEOREMA derivabile $\to$ continua

$f : (a;b) \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a;b)$

Se f è derivabile in x_0, allora f è continua in x_0.



Dim Dobbiamo dimostrare che

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) - f(x_0)] = 0$$

Nell'hp f è derivabile, quindi

Poniamo $x = x_0 + h$; $h = x - x_0$. Se $x \to x_0$, allora $h \to 0$.

Devo dim. allora $\lim_{h \to 0} [f(x_0+h) - f(x_0)] = 0$

$$f(x_0+h) - f(x_0) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \cdot h$$

$$\lim_{h \to 0} [f(x_0+h) - f(x_0)] = \lim_{h \to 0} \underbrace{\left[\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}\right]}_{\text{tende a } f'(x)} \cdot \underbrace{h}_{\text{tende a } 0} = 0$$

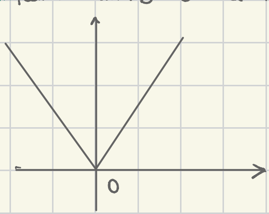
che esiste ed è finito, per questo se moltiplicato per 0 è 0

Se è continua non per forza è derivabile *

Se è derivabile allora è continua

Se non è continua allora non è derivabile

* Ex. $f(x) = |x|$; continua in $x_0 = 0$ ma non derivabile in $x_0 = 0$



CONTINUITÀ DI $f(x)$: funzioni di classe C^1 STUDIA GLI EX

$f'(x)$

Esempio $f(x) = \begin{cases} x^2 \log|x|, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

DERIVATE DI ORDINE SUPERIORE

Definizione: una funzione $f^{(m)}$ è continua su un sottoinsieme E del dominio di derivabilità $D^{(m-1)}$ si dice che f è m-volte derivabile con continuità su E. L'insieme di tutte le funzioni derivabili con continuità m volte in un insieme E di $\mathbb{R}$ si indica con $C^m(E)$. Per $m=1$ si ritrova la classe $C^1(E)$ delle funzioni derivabili con continuità su E

$f'(x) = 2x\log|x| + x^2 \cdot \frac{1}{x} = 2x\log|x| + x, \quad x \neq 0$

~~$\lim_{x\to 0} f'(x) = f(0) \to$ continuità di $f'(x_0)$~~

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} \quad \lim_{h\to 0}\frac{h^2\log|h|}{h}$$

pongo $z = \frac{1}{h}$. Se $h\to 0^+$, $z\to +\infty$; $h\to 0^-$, $z \to -\infty$

$$= \begin{cases} \lim_{z\to+\infty} \frac{1}{z}\cdot\log\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{z}\log\frac{1}{z} = \lim_{z\to+\infty}\frac{1}{z}(\log 1 - \log z) = \lim_{z\to+\infty} -\frac{\log z}{z} = 0 \\ \lim_{z\to-\infty} \frac{1}{z}\cdot\log\left|\frac{1}{z}\right| = \lim_{z\to-\infty}\frac{1}{z}\log\left(-\frac{1}{z}\right) = \lim_{z\to-\infty}\frac{1}{z}(\log 1 - \log(-z)) = \lim_{z\to-\infty} -\frac{\log -z}{z} = 0 \end{cases}$$

$f'(0) = 0$

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0} \overbrace{\boxed{2x\log|x|}}^{\to 0} + \overbrace{x}^{\to 0} = 0$$

La derivata è continua in 0.
↓
stiamo in presenza di una funzione di classe C

Facciamo ora l'esempio in cui la derivata non è continua in x_0

Esempio $f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

$f'(x) = 2x \operatorname{sen}\frac{1}{x} + x^2\cdot\cos\frac{1}{x}\cdot -x^{-2} = 2x\operatorname{sen}\frac{1}{z} - \cos\frac{1}{x}$ **N.B.** $\frac{1}{x} = x^{-1}$

$$f'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^2\operatorname{sen}\frac{1}{h}}{h} = \lim_{h\to 0} \overset{\to 0}{h}\cdot \underbrace{\operatorname{sen}\frac{1}{h}}_{\substack{\text{sempre}\\\text{compreso}\\\text{tra 1 e -1}\\\text{(finito)}}} = 0$$

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0} \underbrace{\boxed{2x\operatorname{sen}\frac{1}{x}}}_{\to 0} - \underbrace{\cos\overbrace{\boxed{\frac{1}{x}}}^{\to\pm\infty}}_{\text{non esiste}} = \nexists$$

f' non è continua in 0.

TEOREMA

Sia f definita e continua in un intorno di x_0 e derivabile in ogni punto $x\neq x_0$. Se $\exists$ finito il limite $\lim_{x\to x_0} f'(x)$, allora f è derivabile anche in x_0 e si ha $\underbrace{f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} f'(x)}$
↓
continuità di f' in x_0.

Esempio $f(x) = \begin{cases} e^{-x}+1, & x\le 0 \\ 2x+2, & x>0 \end{cases}$ $\quad f'(x) = \begin{cases} -e^{-x}, & x\le 0 \\ 2, & x>0 \end{cases}$

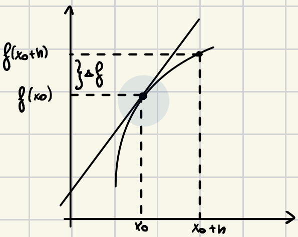
$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = 2 = f'_+(0)$
$\neq$ Non esiste
$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = -1 = f'_-(0)$ $\lim_{x\to 0} f'(x)$

Stabilire se $\exists f'(0)$.

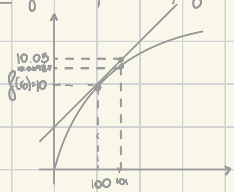
$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} 2x+2 = 2$
$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} e^{-x}+1 = 2$ $\quad \Rightarrow f$ continua in 0
$f(0) = 2$

Differenziale e Differenziabilità

$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$



Esempio $f(x) = \sqrt{x}$; $x_0 = 100$; $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $\quad f'(x_0) = f'(100) = \frac{1}{2\sqrt{100}} = \frac{1}{20}$



$y = 10 + \frac{1}{20}(x - 100)$

$\downarrow$

$x = 101$

$y = 10 + \frac{1}{20} = 10.05$

$\sqrt{101} \simeq 10.04987$

f derivabile in x_0

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

Ricorda: $a_m = o(b_m) \rightarrow \frac{a_n}{b_m} = 0$

$$\lim_{h \to 0} \underbrace{\left[\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0) \right]}_{\text{infinitesimo } = o(1)} = 0$$

→ Perché? Significa che $\dfrac{\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0)}{1}$ tende a 0, ed è proprio ciò che dice il limite $\lim_{h \to 0} \left[\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0) \right] = 0$

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0) = o(1) \quad \text{per } h \to 0$$

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0) + o(1) \quad \text{per } h \to 0$$

$$f(x_0+h) - f(x_0) = f'(x_0) \cdot h + o(1) \cdot h, \text{ per } h \to 0$$

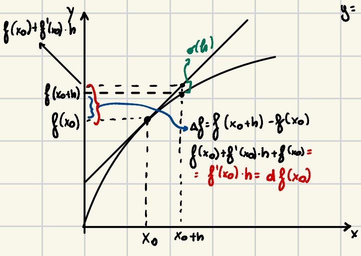
$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot h + o(1)\, h, \text{ per } h \to 0$$

$x = x_0 + h$; $h = x - x_0$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \underbrace{o(1)(x - x_0)}_{\text{termine di errore}}, \text{ per } x \to x_0.$$

→ vedremo che è trascurabile

Differenziale, differenziabilità



$d f(x_0)$ = differenziale di f in x_0

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

$$\lim_{h\to 0} \left[\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - f'(x_0)\right] = 0$$

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - f'(x_0) = o(1)$$

$$f(x_0+h) - f(x_0) = f'(x_0)\cdot h + o(1)\cdot h, \text{ per } h\to 0$$
$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot h + o(1)\cdot h, \quad \text{per } h\to 0$$

N.B. $o(1)\cdot h = o(h)$ per $h\to 0$

1) $f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot h + o(h)$, per $h\to 0$

$x_0 + h = x$; $h = x - x_0$

2) $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0)$, per $x\to x_0$

Differenziabilità

Def $f:(a;b)\to\mathbb{R}$ si dice differenziabile in $x_0 \in (a;b)$ quando $\exists\, m \in \mathbb{R}$ tale che $f(x) = f(x_0) + \underbrace{m(x-x_0)}_{\text{differenziale primo}} + o(x-x_0)$, per $x\to x_0$.

- $df(x_0) = m\cdot(x-x_0)$ è detto DIFFERENZIALE PRIMO della funzione in x_0
- $o(x-x_0)$ è infinitesimo per $x\to x_0$

N.B. dato che si ha: $f(x_0+h) - f(x_0) = m\cdot h + o(h)$, $h\to 0$, si può affermare che, se la funzione è differenziabile, la variazione della funzione è "ben approssimata" dal differenziale primo con un errore che è $o(h)$ cioè che per $h\to 0$ va a zero più velocemente di h.

Teorema

$f:(a;b)\to\mathbb{R}$ e $x_0 \in (a;b)$.

Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

1) f è derivabile in x_0;
2) f è differenziabile in x_0 e si ha $m = f'(x_0)$.

Teorema di Fermat, Rolle, Lagrange. (Di tutti e 3 H)

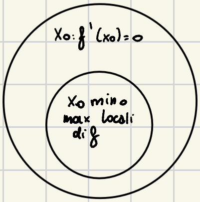
Problema: usare le derivate per trovare i punti di min e max di una funzione.

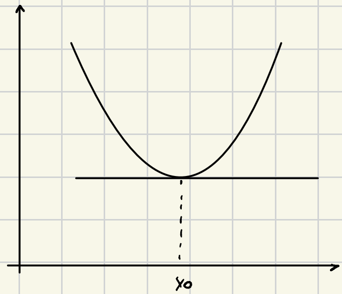
Teorema di Fermat

Sia $\underset{1}{f:(a;b)\to\mathbb{R}}$ una funzione $\underset{2}{\text{derivabile in } x_0}\in(a;b)$. Se x_0 è punto di min o max locale per f, allora

$$f'(x_0) = 0$$

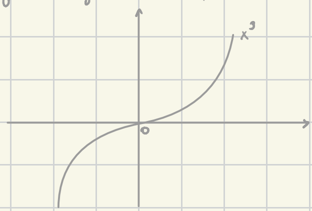
(C.N. affinché x_0 sia punto di min o max).
↓
condizione necessaria



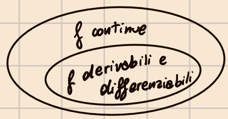


Il teorema di Fermat è solo una condizione necessaria (non sufficiente) → esistono $f'(x)=0$ che non sono punti di max o di min

Esempio $f(x)=x^3$; $f'(x)=3x^2=0$ per $x=0$



Significato geometrico di differenziale: il differenziale è la variazione che subisce la tagente in corrispondenza di una variazione $(x-x_0)$ data alla variabile indipendente

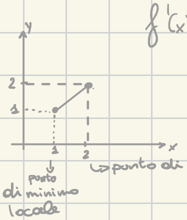


N.B. $x: f'(x)=0$ si dicono punti stazionari per f.

Esempio (non vale Hp1)

$f(x)=x$; $x\in[1;2]$

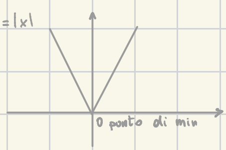
$f'(x)=1$



→ IL TEOREMA DI FERMAT NON VALE

Esempio (non vale Hp2)

$f(x)=|x|$



Esempio $f(x)=(x^2-x)\,e^{-x}$ $(-\infty;+\infty)$

Punti stazionari?

$f'(x)=(2x-1)e^{-x}+(x^2-x)e^{-x}\cdot(-1)= e^{-x}(2x-1-x^2+x)=e^{-x}(-x^2+3x-1)=0$

Risolvi $f'(x)=0$ → $-x^2+3x-1=0$; $x^2-3x+1=0$ Risolvendo l'eq di 2° grado troviamo i punti stazionari.

$\Delta = 9-4=5$; $x_1 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$; $x_2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$

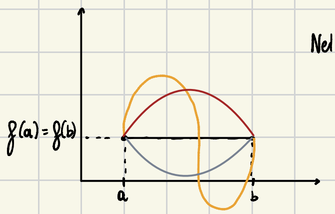
DIM

Fermat → Rolle → Lagrange

Teorema di Rolle

$f: [a;b] \to \mathbb{R}$, $\underbrace{\text{continua su } [a;b]}_{Hp1}$, $\underbrace{\text{derivabile su } (a;b)}_{Hp2}$, con $\underbrace{f(a)=f(b)}_{Hp3}$.

Allora $\exists\, c \in (a;b)$ tale che $f'(c)=0$.

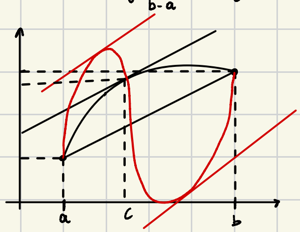


Nel caso in cui è costante è banalmente dimostrabile

Teorema di Lagrange o del valore medio del calcolo differenziabile.

$f: [a;b] \to \mathbb{R}$, continua su $[a;b]$ e derivabile su $(a;b)$. Allora $\exists\, c \in (a;b)$ tale che

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c). \quad \to \quad y_1 - y_2 = m(x_1 - x_2)$$



Esempio

$f(x) = x^2$; $[a;b]$ Dò x scontato che le ipotesi valgono

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{b^2-a^2}{b-a} = \frac{(b-a)(b+a)}{\cancel{b-a}} = b+a$$

$f'(x) = 2x$

$a+b = 2x$; $x = \frac{a+b}{2}$

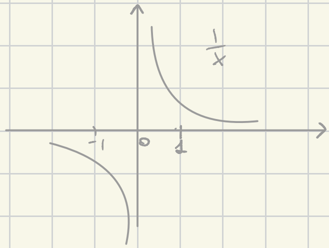
Esempio $f(x) = \frac{1}{x}$; $[-1;1]$ → Punti di Lagrange

$$\frac{f(1)-f(-1)}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$f'(x) = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$

$1 = -\frac{1}{x^2}$ IMPOSSIBILE

Non ha punti di Lagrange



Conseguenze del Teorema di Lagrange

1) Test di monotonia 2) Funzioni con derivata nulla 3) Differenza Funzioni

Teorema Sia $f:(a;b) \to \mathbb{R}$ derivabile su $(a;b)$.

Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

i) f è (de)crescente su $(a;b)$;

ii) $f'(x) \underset{(\le)}{\ge} 0$, $\forall x \in (a;b)$.

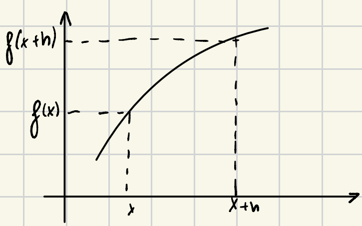
Dim i) $\Rightarrow$ ii)

Hp f crescente $\Leftrightarrow$ $x_1 < x_2$ allora $f(x_2) \ge f(x_1)$

$x \in (a;b)$

$x+h$, $h>0$

$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \ge 0$



$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \boxed{\ge} 0$$

non può essere negativo

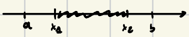
$$\| $$

$$f'(x) \ge 0$$

ii) $\Rightarrow$ i)

Hp $f'(x) \ge 0$, $\forall x \in (a;b)$.

$x_1; x_2 \in (a;b)$ con $x_1 < x_2$



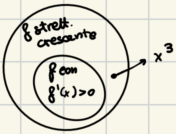
$[x_1; x_2]$ $\left.\begin{array}{l} f \text{ è continua su } [x_1;x_2] \\ f \text{ è derivabile su } (x_1;x_2) \end{array}\right\}$ Hp di Lagrange

Per Lagrange $\exists\, c \in (x_1, x_2)$ tale che $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(c) \ge 0$

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{\underbrace{x_2-x_1}_{>0}} \ge 0 \Rightarrow f(x_2) \ge f(x_1)$$

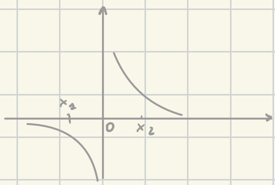
Teorema

Sia $f:(a;b)\to\mathbb{R}$ derivabile su $(a;b)$. Se $f'(x)>0$, $\forall x\in(a;b)$, allora f è strettamente crescente su $(a;b)$. Se $f'(x)>0$, $\forall x\in(a;b)$, allora f è strettamente crescente su $(a;b)$.



Esempio $f(x)=\frac{1}{x}$ $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

$f'(x)=-x^{-2}=-\frac{1}{x^2}<0$

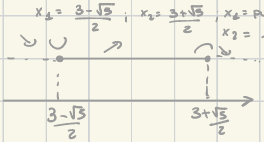


Esempio $f(x)=(x^2-x)e^{-x}$ $(-\infty;+\infty)$

$f'(x)=\underbrace{e^{-x}}_{>0}(-x^2+3x-1)\geq 0$

$-x^2+3x-1\geq 0;\ x^2-3x+1\leq 0$

$x_1=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$; $x_2=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$; $x_1=$ punto di min locale
$x_2=$ // di max locale



Teorema $f:(a;b)\to\mathbb{R}$, derivabile su $(a;b)$.

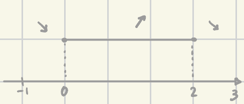
Se $f'(x_0)=0$ e $f'(x)\geq 0$ in un intorno dx (sx) di x_0, mentre $f'(x)\leq 0$ in un intorno sx (dx) di x_0, allora x_0 è punto di minimo (max) locale.

Esempio $f(x)=x^2e^{-x}$

1) Trovare i punti di max e min locali e globali su $[-1;3]$.

$f'(x)=2x\,e^{-x}+x^2e^{-x}(-1)=e^{-x}(2x-x^2)\geq 0$

$2x-x^2\geq 0;\ x^2-2x\leq 0 \begin{cases} x_1=0 \\ x_2=2 \end{cases}$



$x=0$ punto di min locale

$x=2$ punto di max locale

$x=-1$ punto di max locale

$x=3$ // di min. locale

Vale il teorema di Weierstrass

$f(2)=4e^{-2}$

$f(-1)=e^{1}=e$

$x=-1$ punto di max globale

$f(0)=0$; $f(3)=9e^{-3}$

$x=0$ punto di min globale

2) Stabilire se f è invertibile su $[\frac{1}{2};1]$ $\rightarrow$ Si

$f'(x)>0$, $\forall x \in [\frac{1}{2},1] \Rightarrow f$ è strettamente crescente $\Rightarrow f$ è invertibile

TEOREMA Differenziabilità -H

Una funzione $f:(a;b)\to\mathbb{R}$ è differenziabile in $x_0\in(a;b)$ se e solo se è derivabile in x_0. In questo caso il differenziabile $df(x_0):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ è dato da:

$$df(x_0)(h)=f'(x_0)\cdot h$$

DIM. "Se". Sia f derivabile in $x_0\in(a;b)$.

Si ha:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)-f'(x_0)h}{h}=\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}-f'(x_0)\right)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}-f'(x_0)=f'(x_0)-f'(x_0)=0$$

Quindi $f(x_0+h)-f(x_0)-f'(x_0)\cdot h=o(h)$.

Ponendo $m=f'(x_0)$ si ottiene che f è differenziabile in x_0.

"Solo se". Sia f differenziabile in $x_0\in(a;b)$.

Pertanto

$$f(x_0+h)-f(x_0)=m\cdot h+o(h) \qquad \text{per } h\to 0.$$

Si ottiene quindi:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{m h+o(h)}{h}=m\in\mathbb{R}$$

Pertanto f è derivabile in x_0 e si ha

$$f'(x_0)=m.$$

TEOREMA (di Fermat) - H

Sia $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $C \subseteq A$. Sia f differenziabile in un punto x_0 interno a C. Se x_0 è un punto di massimo o minimo locale per f su C, allora $f'(x_0) = 0$.

DIM Sia $x_0 \in C$ un punto interno di C e supponiamo che x_0 sia punto di massimo locale per f (la dimostrazione nel caso di minimo locale è analoga). Esiste pertanto un intorno $U_\varepsilon(x_0)$ tale che

$$f(x^0) \geq f(x), \quad \forall x \in C \cap U_\varepsilon(x_0).$$

Pertanto, per ogni $h > 0$ sufficientemente piccolo (ossia $h \in (0; \varepsilon)$) si ha $x_0 + h \in B_\varepsilon(x_0)$ e quindi

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \leq 0, \quad \forall h \in (0; \varepsilon)$$

e quindi

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \leq 0, \quad (*)$$

dove il limite esiste perché f è differenziabile in x_0.

D'altro conto, per $h < 0$ sufficientemente piccolo, ossia $h \in (-\varepsilon; 0)$, si ha $x_0 + h \in U_\varepsilon(x_0)$ e quindi

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \geq 0 \quad \forall h \in (-\varepsilon; 0).$$

Risulta quindi

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \geq 0 \quad (**)$$

dove il limite esiste perché f è differenziabile in x_0. Le due disuguaglianze $(*)$ e $(**)$ implicano

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = 0.$$

C.V.D.

TEOREMA (di Rolle) - H

Sia $f: [a;b] \to \mathbb{R}$ continua su $[a;b]$, con $f(a) = f(b)$ e derivabile su $(a;b)$. Allora $\exists c \in (a;b)$ tale che $f'(c) = 0$.

DIM. Per il teorema di Weierstrass $\exists$ $x_1, x_2 \in [a;b]$ tali che x_1 sia punto di minimo assoluto per f su $[a;b]$ e x_2 sia punto di massimo assoluto per f su $[a;b]$.

Poniamo $m = f(x_1)$ e $M = f(x_2)$. Se (1° caso) $m = M$, allora f è costante su $[a,b]$, ossia $f(x) = m = M$, $\forall x \in [a,b]$ e quindi $f'(x) = 0$, $\forall x \in (a,b)$.

Infatti, non possono essere entrambi di frontiera per $f(a) = f(b)$

Se (2° caso) $m < M$, almeno uno fra x_1 e x_2 è interno ad $(a;b)$, per la condizione $f(a) = f(b)$. Se ad esempio x_1 è interno ad $[a;b]$, per il teorema di Fermat si ha $f'(x_1) = 0$ e quindi $c = x_1$. Analogamente, se x_2 è interno ad $[a;b]$ si ha $f'(x_2) = 0$ e $c = x_2$.

C.V.D.

TEOREMA (del valore medio / Lagrange) - H

Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua su $[a,b]$ e derivabile su $(a;b)$. Allora esiste un punto $c\in(a;b)$ tale che $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

DIM Consideriamo la funzione ausiliaria $g(x)=f(x)-\left(f(a)+\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\right)$

Osserviamo che $g(x)$ è la differenza tra $f(x)$ e la retta che passa per i punti di coordinate $(a;f(a))$, $(b;f(b))$.

La funzione g è continua su $[a;b]$, derivabile su $(a;b)$ e inoltre $g(a)=g(b)=0$. (se sostituisci $g(x)$ con a e b)

Per il teorema di Rolle $\exists\ c\in(a;b)$ tale che $g'(c)=0$.

Si ha

$$g'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

e quindi

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

C.V.D.

13/11/2024 con Andreano

Punto angoloso e cuspide

Def. Sia $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in A$ punto interno

- Se f è continua in x_0 e se $\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ e $\lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ $\exists$ entrambi ma sono diversi tra loro e almeno uno dei due è finito, x_0 è un punto angoloso.

- Se f è continua in x_0 e $\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = +\infty$ e $\lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = -\infty$ e viceversa, x_0 è una cuspide.

NB Se $h = x - x_0 \Rightarrow f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

Teorema di De L'Hopital

Siano $f, g: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I intervallo, derivabili in I con $g'(x) \neq 0$ in I.
Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$, oppure $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = \pm\infty$, con $x_0 \in I$
e se $\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \overline{\mathbb{R}}$, allora $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.

Lo stesso vale se $x \to +\infty$ o $x \to -\infty$

NB Può accadere che $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \nexists$ ma $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \exists$

Esempio

$f(x) = x + \operatorname{sen} x$

$g(x) = x$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \underbrace{\frac{\operatorname{sen} x}{x}}_{\to 0}\right) \to 1$ ma $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1 + \cos x}{1}\right) = \nexists$

Esempio

(1) $f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x} & x > 0 \\ x + 1 & x \leq 0 \end{cases}$

$f'(x) = \begin{cases} \frac{e^x x - (e^x - 1)}{x^2} & x > 0 \\ 1 & x < 0 \end{cases}$

In $x_0 = 0$

$f'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{e^x - 1}{x} - 1}{x} = \frac{e^x - 1 - x}{x^2} \overset{H}{=} \frac{e^x - 1}{2x} = \frac{1}{2}$

$f'_-(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim \frac{x+1-1}{x} = 1$

$f'_+(0) = f'_-(0) \Rightarrow \nexists\, f'(0)$ $x=0$ è punto angoloso

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{xe^x - e^x + 1}{x^2} & x>0 \\ 1 & x<0 \end{cases}$$

- La $f'_+(0)$ posso calcolarlo come $\lim_{x\to0^+} f'(x)$?

$f'_+(0) = \lim_{x\to0^+} \frac{xe^x - e^x+1}{x^2} \overset{H}{=} \lim_{x\to0^+}\frac{e^x + xe^x - e^x}{2x} = \frac{1}{2}$ $f'_-(0)=\lim_{x\to0^-} f'(x) = \lim_{x\to0^-} 1 = 1$

Si perché f è continua in $x=0$.

NB Se f è continua in x_0 posso fare $\lim_{x\to x_0^+} f'(x)$ e $\lim_{x\to x_0^-} f'(x)$ per vedere se la funzione è derivabile. Però se facendo così uno dei due limiti non esiste, la derivata potrebbe anche esistere; per non sbagliare devo fare il limite del rapporto incrementale

Esempio

(2) $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & x\geq 1 \\ x^2 & x<1 \end{cases}$ $f'(x) = \begin{cases} 2 & x>1 \\ 2x & x<1 \end{cases}$

Se $\left.\begin{array}{l} f'_+(0) = \lim_{x\to1^+} f'(x) = 2 \\ f'_-(0) = \lim_{x\to1^-} f'(x) = 2 \end{array}\right\}$ SBAGLIATO!

↳ perché non è continua in $x=1$
↳ salto

Ottengo però la risposta giusta se faccio il lim del rapporto incrementale

$f'_+(1) = \lim_{x\to1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to1^+} \frac{2x+1-3}{x-1} = \frac{2(x-1)}{x-1} = 2$

$f'_-(1) = \lim_{x\to1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{x^2-3}{x-1} = +\infty$ $\nexists$ derivata sx $\Rightarrow f'(1) = \nexists$

Esempio funzione inversa (tipica domanda a crocette)

f invertibile e derivabile in $x_0=1$

Se $\underset{\downarrow x_0}{f(1)} = 3$ e $\underset{\downarrow f'(x_0)}{f'(1)} = 5 \Rightarrow (f^{-1})'(3) = \frac{1}{5}$

FUNZIONI DI CLASSE C^N e C^∞

Def Sia $f: A\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ derivabile n volte con derivata n-esima continua, $\forall x\in D\subseteq A$, allora $f\in C^n(D)$

Se f ha derivate di ogni ordine $\forall x\in D\subseteq A$, $f\in C^\infty(D)$

TEOREMA DISCONTINUITÀ DERIVATA

La funzione $f'(x)$ non può mai avere discontinuità eliminabili o a salto.

Esempio

Usando il differenziale di $f(x)=e^x$ per approssimare il valore $e^{0,1}$

$\rightarrow$ f differenziabile in x_0 se

$$f(x)=f(x_0)+\underbrace{df(x_0)}_{f'(x_0)}(x-x_0)+o(x-x_0) \text{ per } x\to x_0$$

· Scriviamo la differenziabilità di $f(x)=e^x$ in $x_0=0$

$$e^x=e^0(x-0)+o(x-0) \quad \text{se } x\to 0$$

$$\Rightarrow e^{0.1}\sim 1+0,1=1,1$$

Esempio

Trova il valore $c\in(0;3)$ per cui $f(x)=x^3$ soddisfa le tesi del teorema di Lagrange

$$f'(c)=\frac{f(3)-f(0)}{3-0}$$

$$f'(x)=3x^2$$

$$\Rightarrow 3c^2=\frac{27-0}{3}=9 \rightarrow c=\sqrt{3}\in(0;3)$$

Esempio

Trova $a,b\in\mathbb{R}$ per cui f soddisfa HP Lagrange in $[-1;1]$

$$f(x)=\begin{cases}2x+a & x\geq 0\\ e^{bx}+1 & x<0\end{cases}$$

· Continuità in $x=0$;

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{x\to 0^+}(2x+a)=a=f(0)\\ &\lim_{x\to 0^-}(e^{bx}+1)=2\end{aligned}\right\} a=2 \quad \Rightarrow f(x)=\begin{cases}2x+2 & x\geq 0\\ e^{bx}+1 & x<0\end{cases}$$

· Derivabilità in $x_0=0$

$$f'(x)=\begin{cases}2 & x>0\\ be^{bx} & x<0\end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned}&f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}2=2\\ &f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}be^{bx}=b\end{aligned}\right\} b=2 \quad f \text{ è derivabile in } (-1;1)$$

STUDIO DI FUNZIONE

$$f(x)=x\ln x$$

1. $D:(0;+\infty)$

2. ASINTOTI

· $\lim_{x\to 0^+} x\ln x=0(-\infty)=FI$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{x^{-1}}\overset{H}{=}\frac{\frac{1}{x}}{-x^{-2}}=-\frac{1}{x}\cdot x^2=-x=0 \quad \text{NO As. Verticale}$$

$\lim_{x \to +\infty} x \ln x = +\infty \Rightarrow \nexists$ As. Orizzontale

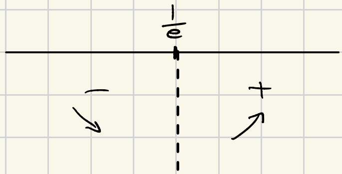
3. Monotonia

$f'(x) \geq 0$

$f'(x) = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$

$\ln x + 1 \geq 0$

$x \geq e^{-1}$

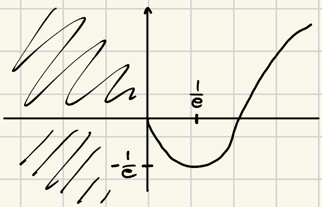


$x = \frac{1}{e}$ punto di minimo locale

$f(e^{-1}) = \frac{1}{e} \ln(e^{-1}) = -\frac{1}{e}$

$x = \frac{1}{e}$ è punto di min assoluto

4. Grafico



15/12/24

Conseguenze teorema Lagrange

Teorema 2.

Se $f:[a;b]\to\mathbb{R}$ soddisfa le Hp del teorema di Lagrange, le seguenti affermazioni sono equivalenti:

1) $f(x)=c \quad \forall x\in[a;b]$; f è una costante

2) $f'(x)=0 \quad \forall x\in(a;b)$

Vale anche l'inverso $1 \Leftrightarrow 2$

Teorema 3.

Se $f,g:[a;b]\to\mathbb{R}$ sono due funzioni che soddisfano le Hp del teorema di Lagrange. Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:

1) $f(x)=g(x)+K \quad \forall x\in[a;b]$ derivata di $K=0$

$(f(x)-g(x)=K, \ \forall x\in[a;b])$

2) $f'(x)=g'(x) \quad \forall x\in(a;b)$

Vale anche l'inverso $1\Leftrightarrow 2$

Esempio

$f(x)=\begin{cases}3 & x\in(1;2)\\ 5 & x=1, x=2\end{cases}$ $\quad f\,[1;2]\to\mathbb{R}$

$f'(x)=0 \quad \forall x\in(1;2)$ → Non soddisfa Hp di continuità in 1 e 2

→ non vale il teorema 2

Derivate successive

$f:(a;b)\to\mathbb{R}$

$f'(x)$

$f''(x)$

$f'''(x)$

$\vdots$

$f^{n}(x)$ Derivata ennesima

Esempio

$f(x)=x^2e^x$

$f'(x)=2xe^x\cdot x^2e^x=e^x(x^2+2x)$

$f'' = e^x(x^2+2x)+e^x(2x+2) = e^x(x^2+4x+2)$

Riprendendo il concetto di differenziabile i valori della retta approssimano i valori della funzione ma i valori della funzione possono essere approssimati da polinomi anche di grado >1.

TEOREMA (Formula di Taylor con il resto secondo Peano)

Sia $f:(a;b)\to\mathbb{R}$, derivabile n volte in $x_0\in(a;b)$.

Allora:

$$\underbrace{\underbrace{f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+\dots+\frac{f^n(x_0)}{n!}(x-x_0)^n}_{\text{polinomio di Taylor}}+\underbrace{o[(x-x_0)^n]}_{\text{Resto di Peano}}}_{\text{Formula di Taylor}} \quad \text{per } x\to x_0$$

Si chiama polinomio di Taylor di grado n: $T_n(x)$, il polinomio escluso l'o

la formula di Taylor comprende anche l'$o(x-x_0)^n$

Quando $x_0=0$ prende il nome di formula di McLaurin.

Esempio

$f(x)=e^x;\ x_0=0\quad n=4$

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{6}x^3+\frac{f''''(0)}{24}x^4+o(x^4)\quad \text{per } x\to 0$$

$$=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)$$

Esempio

$f(x)=\operatorname{sen}x;\ x_0=0;\ n=5$

$$\operatorname{sen}x=\underbrace{x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}}_{T_5(x)}+\underbrace{o(x^5)}_{o(x^5)}\quad \text{per } x\to 0$$

$T_5(x)\ +\ o(x^5) =$ FORMULA DI MCLAURIN

NB Se sommo infiniti termini (= serie):

$$e^x=\sum_{s=0}^{+\infty}\frac{x^s}{s!}\quad \text{con } 0!=1$$

e viene fuori esattamente il valore vero della funzione.

NB Il polinomio di Taylor approssima così bene la funzione perché:

$$g(x)=T_n(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\frac{f'''(x_0)(x-x_0)^3}{3!}+\frac{f^n(x_0)(x-x_0)^n}{n!}$$

$$g(x)=f(x_0)$$

$$g(x)=f'(x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}2(x-x_0)+\frac{f'''(x_0)}{3!}3(x-x_0)^2+\frac{f^n(x_0)}{n!}n(x-x_0)^{n-1}$$

$$g'(x)=f'(x_0);\ g''(x_0)=f''(x_0)\ \dots;\ g^{(n)}(x_0)=f^{(n)}(x_0)$$

In particolare: per $x \to x_0$

1) $f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)}_{\text{retta tangente in } x_0} + o(x-x_0)$ formula di Taylor arrestata al 1° ordine

2) $f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2}_{\text{parabola}} + o(x-x_0)^2$ formula arrestata al 2° ordine

Grazie al concetto di differenziabilità, se f è derivabile in un punto, si è potuto stabilire che una funzione ha localmente, in tale punto, l'approssimazione lineare:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0) \qquad x \to x_0$$

Esempio

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(1+x+o(x)-1)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x+o(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x} = 1$$

NB Taylor funziona sempre

Esempio

A che grado mi devo fermare?

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-x-1}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1+x+o(x)-x-1}{x^2} = \frac{o(x)}{x^2} \;?$$

$$= \lim \frac{1+x+\frac{x^2}{2}-x-1+o(x^2)}{x^2} = \frac{\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Teorema

Sia $f:(a;b)\to \mathbb{R}$ una funzione derivabile n volte in $x_0 \in (a;b)$

Se $f'(x_0)=0$, la natura di x_0 dipende dal segno della prima derivata, $f^{(n)}(x_0)$ che non si annulla in x_0. In particolare:

1) Se n è pari, allora se $f^{(n)}(x_0)>0$, x_0 è punto di min locale

se $f^{(n)}(x_0)<0$, x_0 è punto di max locale perchè dopo decresce

2) Se n è dispari, allora x_0 non è punto di massimo o minimo locale

Esempio

$f(x) = -x^2-(\cos x)^2$

$f'(x) = -2x-(2\cos x)(-\operatorname{sen}x) = -2x+2\operatorname{sen}x\cos x$

$f'(0)=0 \qquad x_0=0 \qquad$ STAZIONARIO

$f''(x) = -2+2(\cos x)^2-2\operatorname{sen}x^2$

$f''(0) = -2+2=0$

$f'''(x) = 4\cos x\cdot(-\operatorname{sen}x)-4\operatorname{sen}x(\cos x) = -8\operatorname{sen}x\cos x$

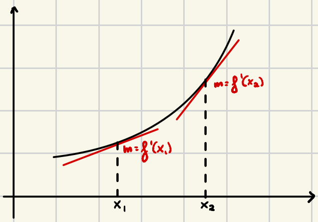
$f'''(0)=0$

$f''''(x) = -8\cos x^2-\operatorname{sen}x^2$

$f''''(0) = -8$

n pari; $f''''(0)<0 \to$ MAX LOCALE

Convessità, concavità e derivata seconda



f convessa e derivabile

$$\left.\begin{array}{l} x_2>x_1 \\ f'(x_2)>f'(x_1) \end{array}\right\} \Rightarrow f' \text{ è } \underline{\text{CRESCENTE}}$$

Teorema

Sia $f:(a;b)\to\mathbb{R}$, derivabile su $(a;b)$. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

1) f è convessa su $(a;b)$
2) $f'(x)$ è crescente su $(a;b)$

Se $f:(a;b)\to\mathbb{R}$ è due volte derivabile ($=f''$) su $(a;b)$, allora 1) e 2) sono equivalenti a:

3) $f''(x)\geq 0,\ \forall x\in(a;b)$

Analogo ma al contrario vale per le concave

Esempio

$f(x)=(x^2-1)e^x$

$f'(x)=2xe^x+(x^2-1)e^x=e^x(x^2+2x-1)$

$f''(x)=e^x(x^2+2x-1)+e^x(2x+2)=e^x(x^2+4x+1)$

$f''(x)\geq 0 \to e^x(x^2+4x+1)$

$e^x>0\quad \forall x\in\mathbb{R}$

$x^2+4x+1\geq 0 \to x_{1,2}=-2\pm\sqrt{3} \to x\leq -2-\sqrt{3}\ \vee\ x\geq -2+\sqrt{3}$

PUNTO DI FLESSO

	$-2-\sqrt{3}$		$-2+\sqrt{3}$	
f''	+		−	+
f	$\cup$		$\frown$	$\cup$

NB Se $f''(x)>0\quad \forall x\in(a;b)$, allora f è strettamente convessa, ma non viceversa.

Esempio

$f(x)=x^4$

$f'(x)=4x^3$

$f''(x)=12x^2=0$ per $x=0$

Teorema

Se $f:(a;b)\to\mathbb{R}$ è derivabile su $(a;b)$, allora le seguenti informazioni sono equivalenti:

1) f è convessa su $(a;b)$ → il grafico sta sopra la tangente
2) $f(x)\geq f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)\quad \forall x,x_0\in(a;b)$

Al contrario per le funzioni concave

Le funzioni di utilità sono concave, quelle di costo convesse

COROLLARIO

Se $f:(a;b)\to\mathbb{R}$ è convessa e derivabile su $(a;b)$, allora ogni punto stazionario è di minimo assoluto

Dimostrazione

$$\begin{cases} x_0 : f'(x_0)=0 \\ 2) \Rightarrow f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x \in (a;b) \end{cases}$$ → Per il teorema precedente

x_0 punto di minimo assoluto

TEOREMA (Conseguenza di Lagrange 2) - H

Se $f:[a;b]$ continua su $[a;b]$, derivabile su $(a;b)$. Allora $f'(x)=0$ $\forall x\in(a;b)$ se e solo se $\exists K\in\mathbb{R}$ tale che

$$f(x)=K,\ \forall x\in[a;b]$$

ossia se e solo se f è costante su $(a;b)$.

DIM "Se" Sappiamo già che la derivata di una funzione costante è la funzione nulla.

"Solo se" Per il teorema del valor medio applicato all'intervallo $[a;x]$ $\exists$ un punto $c\in(a;x)$ tale che $f'(c)=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=0$,

ossia $f(x)=f(a)$. Siccome x è arbitrario in $[a;b]$ si ottiene $f(x)=f(a)$ $\forall x\in[a;b]$.

C.V.D.

TEOREMA (Conseguenza di Lagrange - 3) - H

Siano $f,g:[a;b]\to\mathbb{R}$ continue su $[a,b]$ e derivabili su $[a;b]$. Allora

$f'(x)=g'(x),\ \forall x\in(a,b)$ se e solo se $\exists K\in\mathbb{R}$ tale che $f(x)=g(x)+K,\ \forall x\in[a;b]$.

DIM "Se" Se $f(x)=g(x)+K$, allora ovviamente $f'(x)=g'(x)$.

"Solo se" Sia $h:[a;b]\to\mathbb{R}$ la funzione ausiliaria $h(x)=f(x)-g(x)$.

Si ha

$$h'(x)=f'(x)-g'(x),\ \forall x\in(a;b).$$

Pertanto, per il teorema precedente, h è costante su $[a;b]$.

Quindi $\exists K\in\mathbb{R}$ tale che

$$h(x)=f(x)-g(x)=K,\ \forall x\in[a;b]$$

ossia

$$f(x)=g(x)+K,\ \forall x\in[a;b]$$

C.V.D.

TEOREMA - H

Sia $f:(a;b)\to\mathbb{R}$ derivabile con $a,b\in\overline{\mathbb{R}}$. Se $f'(x)>0$ $\forall x\in(a;b)$, allora f è strettamente crescente su $(a;b)$

DIM Sia $f'(x)>0$ $\forall x\in(a;b)$ e $x_1,x_2\in(a;b)$, con $x_1<x_2$.

Per il Teorema del valor medio, esiste $c\in[x_1,x_2]$ tale che

$$f'(c)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

Siccome $f'(c)>0$ $\forall c$ e $x_2-x_1>0$, si ottiene $f(x_2)>f(x_1)$

C.V.D.

19-11-2024

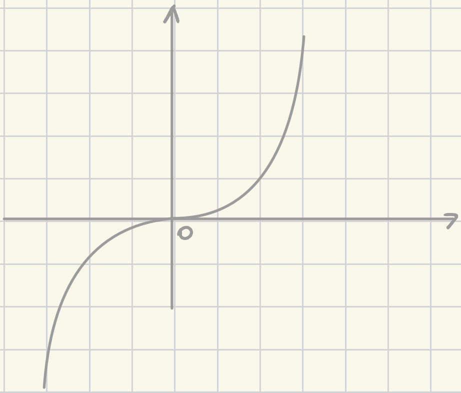
$\mathcal{C}^1 \Leftrightarrow f'(x)$ è continua

$f'' ; f''' ; \dots ; f^{(m)}$

$\mathcal{C}^2 \quad \mathcal{C}^3 \quad \dots \quad \mathcal{C}^m$

Esempio

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0 \\ -x^2, & x \leq 0 \end{cases}$$



$x > 0 \longrightarrow f'(x) = 2x$

$x < 0 \longrightarrow f'(x) = -2x$

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} 2x = 0; \\ &\lim_{x \to 0^-} f'(x) = \lim_{x \to 0^-} -2x = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow f'(0) = 0$$

f è di classe $\mathcal{C}^1$? Sì

$$f'(x) = \begin{cases} 2x, & x \geq 0 \\ -2x, & x < 0 \end{cases}$$

$$f''(x) = \begin{cases} 2, & x > 0 \\ -2, & x < 0 \end{cases}$$

In 0? $\rightarrow$ è di classe $\mathcal{C}^2$?

$\lim_{x \to 0^+} f''(x) = 2$

NON È DI CLASSE $\mathcal{C}^2$

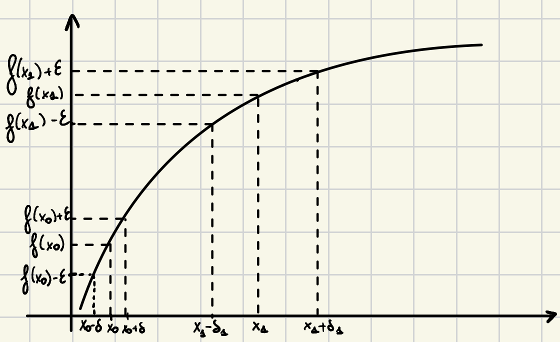
$\lim_{x \to 0^-} f''(x) = -2$

CONTINUITÀ UNIFORME E CONDIZIONE DI LIPSCHITZ

Def $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è continua in $x_0 \in A \cap A'$ quando $\underbrace{\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)}_{1)}$.

Se f è continua in ogni punto $x_0 \in A$, allora f si dice continua su A.

1) $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ tale che $f(x) \in (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$, $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$



Def (Continuità uniforme)

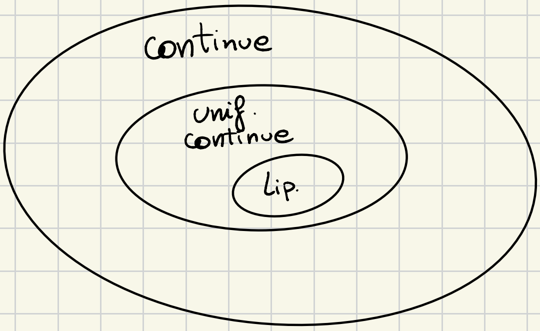
$f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è uniformemente continua su A se $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ tale che

$$|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon,$$

$\forall x, y \in A$

N.B. Se $y = x_0$. $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tale che $|x-x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)| < \varepsilon, \ \forall x, x_0 \in A$.

N.B. Se f è uniformemente continua su A, allora f è continua su A.



Oss: in parole semplici una funzione uniformemente continua è una funzione continua per la quale a piccole variazioni della variabile x corrispondono piccole variazioni delle immagini. È una funzione il cui grafico non si impenna e non oscilla liberamente.

TEOREMA (di Heine - Cantor)

Se $A \subseteq \mathbb{R}$ è compatto, allora le due seguenti affermazioni sono equivalenti:

1) f è continua su A;
2) f è uniformemente su A.

Def (Condizione di Lipschitz)

$f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ soddisfa la condizione di Lipschitz (o è Lipschitziana) su A quando $\exists K > 0$ tale che

$$|f(x_1) - f(x_2)| \le K |x_1 - x_2|, \ \forall x_1, x_2 \in A.$$

Esempio (funzione che non soddisfa Lipschitz)

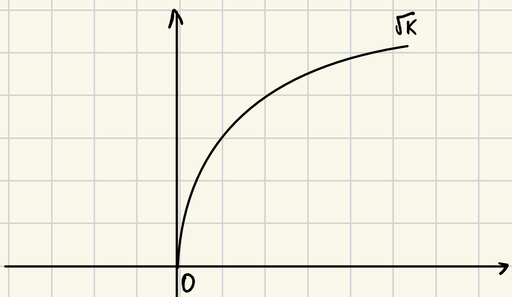
$f(x) = \sqrt{x}$ su $A = [0; b]$

Def: La più piccola costante $K > 0$ per cui vale $|f(x) - f(y)| \le K \cdot |x-y|$ è detta COSTANTE DI LIPSCHITZ.

$x_2 = 0$
$x_1 = x$

$$|f(x)-f(0)| \le K|x-0|; \quad |\sqrt{x} - 0| \le K|x|; \quad \sqrt{x} \le Kx; \quad \frac{\sqrt{x}}{x} \le K; \quad \cancel{\frac{1}{\sqrt{x}} \le K, \ \forall x \in A}$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$$



N.B. $\dfrac{|f(x_1) - f(x_2)|}{|x_1 - x_2|} \le K, \ \forall x_1, x_2 \in A$

$x_2 = x$
$x_1 = x + h$

$$\frac{|f(x+h) - f(x)|}{|h|} = \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right| \le K$$

f derivabile in $I \Rightarrow f$ lipschitziana in $I \Rightarrow f$ uniformemente continua in $I \Rightarrow f$ continua in I

Calcolo differenziabile con n variabili

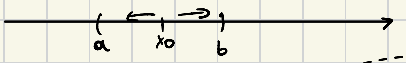
Teorema

Se $f:[a;b]\to\mathbb{R}$ è di classe C^1 su $[a;b]$, allora soddisfa la condizione di Lipschitz

Calcolo differenziale per funzioni di n variabili

$f:(a;b)\to\mathbb{R}$, $x_0\in(a;b)$

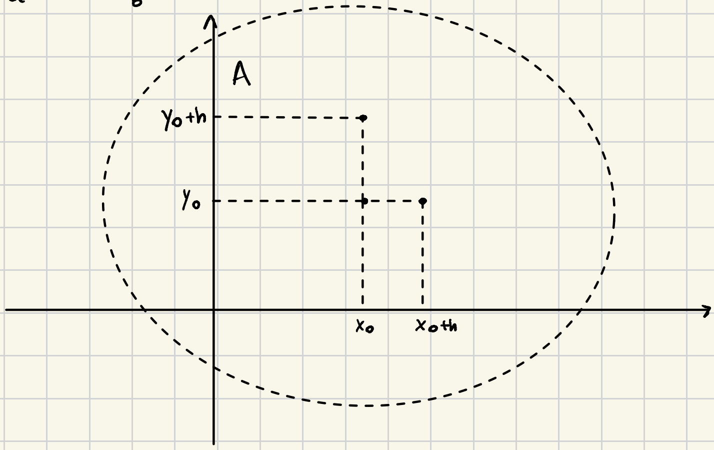
$$f'(x_0)=\lim_{h\to0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$



$f:A\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, A aperto; $(x_0,y_0)\in A$

$f(x;y)$; $\Delta f=f(x_0+h;y_0)-f(x_0,y_0)$

$$\lim_{h\to0}\frac{\Delta f}{h}=\frac{f(x_0+h;y_0)-f(x_0;y_0)}{h}=f'_x(x_0;y_0)$$



$$\Delta f=f(x_0;y_0+h)-f(x_0;y_0)$$

$$\lim_{h\to0}\frac{\Delta f}{h}=f'_y(x_0;y_0)$$

Esempio

1) $f(x;y)=x^2e^y$

$f'_x(x;y)=2xe^y$

$f'_y(x;y)=x^2e^y$

2) $f(x;y)=x^2\log(3+x^2y^2)$

$f'_x(x,y)=2x\cdot\log(3+x^2y^2)+x^2\cdot\frac{1}{3+x^2y^2}\cdot2xy^2$

$f'_y(x;y)=x^2\cdot\frac{1}{3+x^2y^2}\cdot2yx^2$

$f:A\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ $\quad \underline{x}^0\in A$; $\underline{x}^0=(x_1^0,x_2^0,\dots,x_n^0)$ $\qquad$ n variabili $\to$ n derivate parziali

$f(x_1,x_2,\dots,x_n)=f(\underline{x})$

Incremento la variabile x_i; $i=1,\dots,n$

$$(x_1^0,x_2^0,\dots,x_i^0+h,\dots,x_n^0)=\boxed{\underline{x}^0+h\underline{e}^i}=(x_1^0;x_2^0;\dots;x_n^0)+h(0;\dots;0;i;0;\dots;0)$$

$$\Delta f=f(\underline{x}^0+h\underline{e}^i)-f(\underline{x}^0)$$

$$\lim_{h\to0}\frac{\Delta f}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(\underline{x}^0+h\underline{e}^i)-f(\underline{x}^0)}{h}=f'_{x_i}(\underline{x}^0)$$, se il limite $\exists$ finito.

Esempio

$f(x;y;z)=x^2y^2z^2+e^{xyz}$

$f'_x(x;y;z)=2xy^2z^2+e^{xyz}\cdot yz$

$f'_y(x;y;z) = 2yx^2z^2 + e^{xyz} \cdot xz$

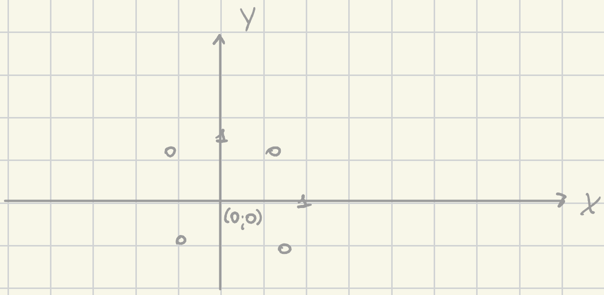
$f'_z(x;y;z) = 2zx^2y^2 + e^{xyz} \cdot xy$

Def $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è derivabile in $\underline{x}^0 \in A$, quando in $\underline{x}^0$ esistono tutte le derivate parziali.

N.B. Per $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ derivabilità $\not\Rightarrow$ continuità.

Esempio

$$f(x;y) = \begin{cases} 1, & \text{se } x=0 \text{ oppure } y=0 \\ 0, & \text{altrove} \end{cases}$$

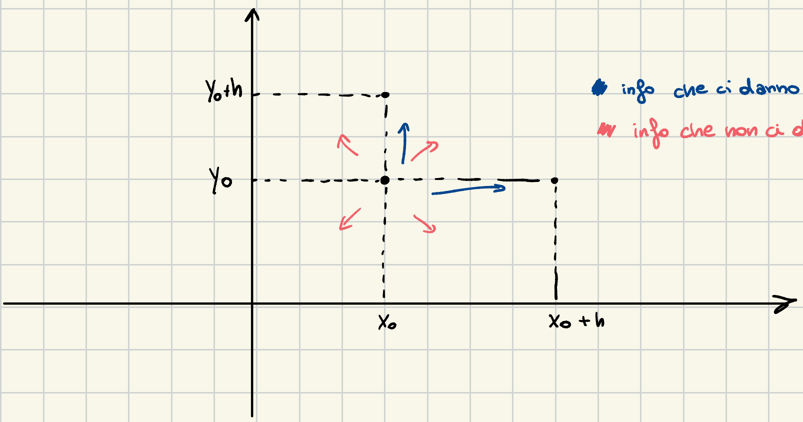


f non è continua in $(0;0)$

$$f'_x(0;0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h;0)-f(0;0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1-1}{h} = 0$$

$$f'_y(0;0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0;h)-f(0;0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1-1}{h} = 0$$

f è derivabile in $(0;0)$



- info che ci danno le derivate parziali
- info che non ci danno (ma che ci servono per la continuità)

$\downarrow$

per questo la derivabilità non comporta la continuità

DIFFERENZIABILITÀ PER FUNZIONI DI n VARIABILI

$f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è differenziabile in $x_0 \in A$ quando $\exists\ m \in \mathbb{R}$ tale che

$$f(x_0+h) = f(x_0) + mh + o(h), \text{ per } h \to 0$$

Def $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è differenziabile in $\underline{x}^0 \in A$ quando $\exists\ \underline{m} = (m_1, m_2, \dots, m_n) \in \mathbb{R}^n$ tale che

$$f(\underline{x}^0 + \underline{h}) = f(\underline{x}^0) + \underbrace{\underline{m} \cdot \underline{h}}_{\boxed{m_1h_1 + m_2h_2 + \dots + m_nh_n}} + o(\|\underline{h}\|) \text{ per } \underline{h} \to \underline{0}$$

20/12/2024

$$T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

Se $x_0 = 0$

$$T_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

Si chiama polinomio di McLaurin

$f(x) = e^x \Rightarrow f(0) = 1$

$f'(x) = e^x \Rightarrow f'(0) = 1$

$f^n(x) = e^x \Rightarrow f^{(n)}(0) = 1$

$$\Rightarrow T_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^n}{n!}$$

Esempio

$f(x) = \ln(x+1)$

$f'(x) = \frac{1}{x+1}$ $\quad f''(x) = \frac{-1}{(x+1)^2}$ $\quad f'''(x) = \frac{2}{(x+1)^3}$ $\quad f^{IV}(x) = \frac{-2(3)}{(x+1)^4}$ $\quad f^{V}(x) = \frac{2\cdot3\cdot4}{(x+1)^5}$ $\quad f^{VI}(x) = \frac{-2\cdot3\cdot4\cdot5}{(x+1)^6}$ $\dots$ $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x+1)^n}$

Per McLaurin

$f(0) = 0$ $\quad f'(0) = 1$ $\quad f''(0) = -1$ $\quad f'''(0) = 2$ $\quad f^{IV}(0) = -3!$ $\quad f^{V}(0) = 4!$ $\quad f^{VI}(0) = -5!$ $\dots$ $f^{(n)}(0) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x+1)^n}$

$$T_n(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{2}{3!}x^3 - \frac{3!}{4!}x^4 + \frac{4!}{5!}x^5 - \frac{5!}{6!}x^6 + \dots \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(n!)} \cdot x^n = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n}$$

FUNZIONI SENO E COSENO

$f(x) = \operatorname{sen} x$ $\quad f(0) = 0$

$f'(x) = \cos x$ $\quad f'(0) = 1$

$f''(x) = -\operatorname{sen} x$ $\quad f''(0) = 0$

$f'''(x) = -\cos x$ $\quad f'''(0) = -1$

$f^{IV}(x) = \operatorname{sen} x$ $\quad f^{IV}(0) = 0$

$f^{V}(x) = \cos x$ $\quad f^{V}(0) = 1$

$f^{VI}(x) = -\operatorname{sen} x$ $\quad f^{VI}(0) = 0$

$$T_n(x) = 1 \cdot x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Il seno è una funzione dispari

↳ polinomio di McLaurin DISPARI

$f(x) = \cos x$ $\quad f(0) = 1$

$f'(x) = -\operatorname{sen} x$ $\quad f(0) = 0$

$f''(x) = -\cos x$ $\quad f(0) = -1$

$f'''(x) = \operatorname{sen} x$ $\quad f(0) = 0$

$f^{IV}(x) = \cos x$ $\quad f(0) = 1$

e si ricomincia

Il coseno è una funzione pari

↳ polinomio di McLaurin PARI

$$T_n(x) = \underbrace{1 - \frac{x^2}{2}}_{} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$$

Componenti asintotici già ottenuti nei LIMITI NOTEVOLI (asintotico $\sim$)

polinomio di McLaurin di grado 1

$$\lim_{x\to0} \frac{\operatorname{sen} x - x}{\ln(x+1)} = \text{usando gli asintotici} \lim_{x\to0} \frac{x-x}{x}$$

No! non si può considerare

$$\lim_{x\to0} \frac{\operatorname{sen} x - x}{\ln(x+1)} = \lim_{x\to0} \frac{x - \frac{x^3}{3!} - x}{x} = \lim_{x\to0} -\frac{x^3}{3!} = 0$$

↳ sostituiamo una parte del polinomio di McLaurin

Esempio

$$\lim_{x\to0} \frac{\operatorname{sen} x - x}{\ln(x^2+1)} = \lim_{x\to0} \frac{x - \frac{x^3}{3!} - x}{x^2} = \lim_{x\to0} -\frac{x}{3!} = 0$$

Esempio

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1-\cos\sqrt{x}-\frac{x}{2}}{2x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1-\left(1-\frac{(\sqrt{x})^2}{2}+\frac{(\sqrt{x})^4}{4!}\right)-\frac{x}{2}}{2x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1-1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{4!}-\frac{x}{2}}{2x^2} = \frac{-1}{2\cdot 4!} = -\frac{1}{48}$$

Studio di funzione

$f(x) = (x^2-3)e^x$

$D = \mathbb{R}$

$\lim_{x\to+\infty} (x^2-3)e^x = +\infty$ non esistono asintoti orizzontali a $+\infty$

$\lim_{x\to-\infty} (x^2-3)e^x = \frac{x^2-3}{e^{-x}} = 0$ $y=0$ asintoto orizzontale a $-\infty$

Segno della funzione

$f(x)>0 \Leftrightarrow (x^2-3)e^x>0 \quad x^2-3>0 \quad x^2>3 \quad x<-\sqrt{3} \vee x>\sqrt{3}$

Intersezione con gli assi

$x_1=-\sqrt{3} \quad x_2=\sqrt{3} \qquad y=(0;-3) \quad y=-3$

Derivata prima

$f'(x) = 2xe^x+(x^2-3)e^x = (x^2+2x-3)e^x$

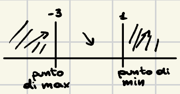
$f'(x)>0 \Leftrightarrow (x^2+2x-3)e^x>0 \Leftrightarrow x^2+2x-3>0$

$x^2+2x-3=0$

$x_{1,2} = \frac{-2\pm\sqrt{4+12}}{2} = \frac{-2\pm 4}{2} \begin{cases} -3 \\ 1 \end{cases}$

Segno derivata prima

$f'(x)>0 \Rightarrow x<-3 \vee x>1$



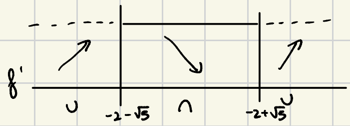
In $x=-3$ f era un punto di max locale con $f(-3)=\frac{6}{e^3}$

In $x=1$ un punto di min locale con $f(1)=-2e$

$f''(x) = (2x+2)e^x+(x^2+2x-3)e^x = (x^2+4x-1)e^x$

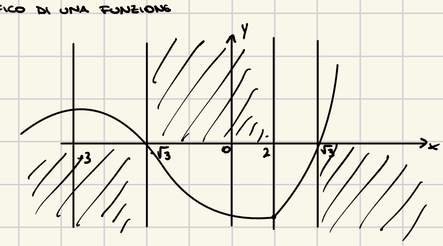
$f''(x)>0 \Leftrightarrow x^2+4x-1>0$

$x^2+4x-1=0 \quad x_{1;2} = \frac{-4\pm\sqrt{16+4}}{2} = \frac{-4\pm\sqrt{20}}{2} = \frac{-4\pm 2\sqrt{5}}{2} = -2\pm\sqrt{5}$

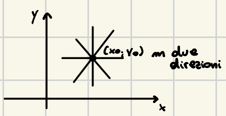


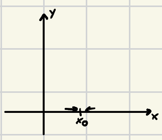
In $x=-2\pm\sqrt{5}$ f ha due punti di flesso (punti a tangente orizzontale)

Grafico di una funzione



Derivate parziali





derivabilità di funzioni in più variabili -> molto più debole della derivabilità in $\mathbb{R}$

approssimare con il piano tangente

Esempio di funzione derivabile in un punto ma non differenziabili

$f(x;y)=\sqrt{|xy|}$

Sia $(x_0;y_0)=(0;0)$

$\frac{\delta f}{\delta x}(0;0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h;0)-f(0;0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0$

Condizione di differenziabilità per $f(x;y)$ in $(x_0;y_0)$:

$f(x;y) = f(x_0;y_0) + \frac{\delta f}{\delta x}(x_0;y_0)(x-x_0) + \frac{\delta f}{\delta y}(x_0;y_0)(y-y_0) + (o\,\|(x-x_0;y-y_0)\|)$

funzione di due variabili

$$\Leftrightarrow f(x;y) - f(x_0;y_0) - \frac{\delta f}{\delta y}(x_0;y_0)(x-x_0) - \frac{\delta f}{\delta y}(x_0;y_0)(y-y_0) = o(\|(x-x_0);(y-y_0)\|)$$

$$\Leftrightarrow \lim_{(x;y)\to(x_0;y_0)} \frac{f(x;y) - f(x_0;y_0) - \frac{\delta f}{\delta x}(x_0;y_0)(x-x_0) - \frac{\delta f}{\delta y}(x_0;y_0)(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} = 0$$ Se è differenziabile

Nel nostro caso:

$$\lim_{(x;y)\to(0;0)} \frac{\sqrt{|xy|} - 0 - 0x - 0y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x;y)\to(0;0)} \frac{\sqrt{|xy|}}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Lungo l'asse x:

$$\lim_{x\to 0} \frac{0}{\sqrt{x^2}} = 0$$ lungo la retta $y=x$ $$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{2x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{|x|}{\sqrt{2}|x|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\Rightarrow$ il limite $\nexists$

$\Rightarrow f$ non differenziabile in $(0;0)$

PROPOSIZIONE (Esempio 1427)

Se $f(x) = \log(1+x)$, $\forall x_0 > -1$ la formula di Taylor di ordine m con centro in x_0 è:

$$\log(1+x_0+h) = \log(1+x_0) + \sum_{K=1}^{m} (-1)^{K+1} \cdot \frac{h^K}{K(1+x_0)^K} + o(h^m)$$

In particolare, se $x_0 = 0$,

$$\log(1+h) = \sum_{K=1}^{m} (-1)^{K+1} \cdot \frac{h^K}{K} + o(h^m)$$

DIM Basta osservare che:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}; \quad f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}; \quad f'''(x) = 2 \cdot \frac{1}{(1+x)^3}; \quad f^{IV}(x) = -6 \cdot \frac{1}{(1+x)^4}; \dots; \quad f^{(K)}(x) = (-1)^{K+1} \cdot \frac{(K-1)!}{(1+x)^K}$$

Pertanto

$$\log(1+x_0+h) = \log(1+x_0) + \sum_{K=1}^{m} \frac{f^{(K)}(x_0)}{K!} (x-x_0)^K + o(h)$$

e sostituendo si ottiene la formula cercata.

C.V.D.

PROPOSIZIONE (Esempio 1428)

1) Formula di McLaurin per e^x.

Si ha, per $f(x) = e^x$:

$f(0) = 1$; $f'(x) = f''(x) = \dots = f^{(m)}(x) = e^x$

e quindi $f'(0) = f''(0) = \dots = f^{(m)}(0) = 1$

Pertanto

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^m}{m!} + o(x^m)$$

2) Formula di McLaurin per $f(x) = \operatorname{sen} x$

Si ha $f(0) = 0$ e

$f'(x) = \cos x$; $f''(x) = -\operatorname{sen} x$; $f'''(x) = -\cos x$; $f^{IV}(x) = \operatorname{sen} x$; $f^{V}(x) = \cos x$ ...

Ossia

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{1}{3!} x^3 + \frac{1}{5!} x^5 + \dots + \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} x^{2m+1} + o(x^{2m+1}) =$$

$$= \sum_{K=0}^{m} \frac{(-1)^K}{(2K+1)!} + o(x^{2m+1}).$$

3) Formula di McLaurin per $f(x) = \cos x$

Si ha $f(0) = 1$ e

$f'(x) = -\operatorname{sen} x$; $f''(x) = -\cos x$; $f'''(x) = \operatorname{sen} x$; $f^{IV}(x) = \cos x$; $f^{V}(x) = -\operatorname{sen} x$; ...

Ossia

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!} x^2 + \frac{1}{4!} x^4 + \dots + \frac{(-1)^m}{(2m)!} x^{2m} + o(x^{2m}) =$$

$$= \sum_{K=0}^{m} \frac{(-1)^K}{(2K)!} x^{2K} + o(x^{2m}).$$

Gradiente

Def. $f: A \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ con A aperto, è differenziabile in $\underline{x}^o \in A$ quando $\exists\ \underline{m} \in \mathbb{R}^m$ ($\underline{m} = (m_1, m_2, \dots, m_m)$) tale che:

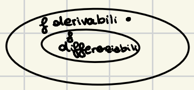
$$f(\underline{x}^o + h) = f(\underline{x}^o) + \underline{m} \cdot \underline{h} + o(\|\underline{h}\|) \quad \text{per } h \to 0$$

NB $\underline{h} = (h_1, h_2, \dots, h_m)$

Se poniamo $\underline{x} = \underline{x}^o + h$; $\underline{h} = \underline{x} - \underline{x}^o$ $\longrightarrow$ ① $f(\underline{x}) = f(\underline{x}^o) + \underline{m}(\underline{x} - \underline{x}^o) + o(\|\underline{x} - \underline{x}^o\|)$ per $\underline{x} \to \underline{x}^o$ (se $\underline{h} \to \underline{0}$ e $\underline{x} \to \underline{x}^o$)

Teorema

Sia $f: A \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ con A aperto e $\underline{x}^o \in A$. Se f è differenziabile in $\underline{x}^o$, allora f è derivabile in $\underline{x}^o$ e si ha $m_i = f'_{x_i}(\underline{x}^o)$, $\forall i = 1, 2, \dots, m$



Teorema:

Se $f: A \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ con A aperto è differenziabile in $\underline{x}^o \in A$, allora f è continua in $\underline{x}^o$.

Esempio

$$f(x;y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x=0 \text{ oppure } y=0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

f è derivabile in $(0;0)$ ma non è continua in $(0;0)$ => allora f non è differenziabile in $(0;0)$

$f: A \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ con $\underline{x}^o \in A$; $\underbrace{(f'_{x_1}(\underline{x}^o), f'_{x_2}(\underline{x}^o), \dots, f'_{x_m}(\underline{x}^o))}_{\text{GRADIENTE DI } f \text{ in } \underline{x}^o\ (\nabla f(\underline{x}^o))} \in \mathbb{R}^m$

Esempio

$f(x;y) = x^2 e^{(x^2-y)}$

$f'_x(x;y) = 2x\, e^{(x^2-y)} + x^2 e^{(x^2-y)} \cdot 2x = e^{(x^2-y)}(2x^3+2x)$

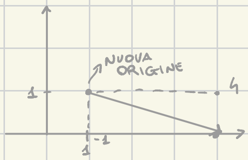
$f'_y(x;y) = x^2 \cdot e^{(x^2-y)} \cdot (-1) = -x^2 \cdot e^{(x^2-y)}$

VOGLIO CALCOLARE IL GRADIENTE DI f in $(1;1)$

$\hookrightarrow f'_x(1;1) = 4$; $f'_y(1;1) = -1 \to \nabla f(1;1) = (4;-1)$

GRADIENTE = CRESCERE

- Nel punto $(1;1)$ la funzione vale 1.
  In questo punto puoi spostarti in varie direzioni e in particolare i valori di f crescono nella direzione del gradiente (NON SOLO)
- Ammettiamo che il punto $(1;1)$ sia la nuova origine degli assi.



Definizione di punto stazionario o critico:

sia $f: A \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, un punto $\underline{x}_0 \in A$ è detto stazionario o critico per f se: $\nabla f(\underline{x}_0) = 0$

Allora scrivo ① <=> $f(\underline{x}) = f(\underline{x}^o) + \nabla f(\underline{x}^o)(\underline{x} - \underline{x}^o) + o(\|\underline{x} - \underline{x}^o\|)$ per $\underline{x} \to \underline{x}^o$

Teorema di Fermat in variabili

$f: A \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ con A aperto.

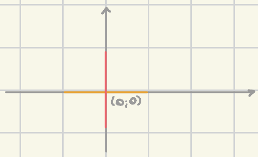
Se $\underline{x}^o \in A$ è punto di min o max locale di f, allora $\nabla f(\underline{x}^o) = \underline{0}$

NON VALE SEMPRE IL VICEVERSA

Esempio

$f(x;y) = x^2 - y^2$

$\begin{cases} f'_x(x;y) = 2x = 0 \\ f'_y(x;y) = -2y = 0 \end{cases} \to \left.\begin{matrix} x=0 \\ y=0 \end{matrix}\right] \begin{matrix} (0;0) \text{ stazionario} \\ f(0;0) = 0 \end{matrix}$



- $f(x;0) = x^2 \geq 0 = f(0;0)$
- $f(0;y) = -y^2 \leq 0 = f(0;0)$

$\hookrightarrow$ allora l'origine non è punto di min o max, perché ottengo valori maggiori o minori

$\Rightarrow (0;0)$ STAZIONARIO, ma non di max o min $\to$ PUNTO DI SELLA

TEOREMA (Fermat) -H

Sia $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definita su un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^n$ e sia $C \subseteq A$. Supponiamo che f sia derivabile in $\underline{x}^0 \in \operatorname{int} C$ (ossia in $\underline{x}^0$ esistono tutte le derivate parziali). Se $\underline{x}^0$ è un punto di minimo o massimo locale per f su C, allora $\nabla f(\underline{x}^0) = \underline{0}$.

DIM La effettuiamo nel caso in cui $\underline{x}^0$ è un punto di minimo locale. La dimostrazione nel caso del massimo locale è analoga. Siccome $\underline{x}^0$ è punto di minimo locale per f su C,

$\exists\, U(\underline{x}^0)$ tale che

$$f(\underline{x}^0) \leq f(\underline{x}), \quad \forall \underline{x} \in C \cap U(\underline{x}^0).$$

Poniamo $\underline{x} = \underline{x}^0 + \underline{h}$. Per $\underline{h} \neq \underline{0}$ con $\|\underline{h}\|$ sufficientemente piccola si ha $\underline{x}^0 + \underline{h} \in C$, siccome $\underline{x}^0$ è interno a C e

$$f(\underline{x}^0) \leq f(\underline{x}^0 + \underline{h}).$$

Poniamo ora $\underline{h} = t \cdot \underline{e}^i$, dove $\underline{e}^i$ è l' ultimo vettore fondamentale di $\mathbb{R}^n$ e $t \in \mathbb{R}$.

Si ha

$$\|\underline{h}\| = |t| \cdot \|\underline{e}^i\| = |t| .$$

Pertanto, per $|t|$ sufficientemente piccolo si ha

$$\underline{x}^0 + t\underline{e}^i \in C \quad \text{e} \quad f(\underline{x}^0) \leq f(\underline{x}^0 + t\underline{e}^i).$$

Risulta pertanto:

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{f(\underline{x}^0 + t\underline{e}^i) - f(\underline{x}^0)}{t} \geq 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{t \to 0^-} \frac{f(\underline{x}^0 + t\underline{e}^i) - f(\underline{x}^0)}{t} \leq 0$$

Siccome f è derivabile in $\underline{x}^0$ deve risultare

$$f'_{x_i}(\underline{x}^0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\underline{x}^0 + t\underline{e}^i) - f(\underline{x}^0)}{t} = 0.$$

Siccome i è arbitrario in $[1, \ldots, n]$, risulta

$$\nabla f(\underline{x}^0) = \underline{0} .$$

Spazi vettoriali e Matrici

ALGEBRA LINEARE

$\mathbb{R}^m \to \underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m) \begin{cases} \text{SOMMA } \underline{x}+\underline{y} \\ \text{PRODOTTO PER UN NUMERO } \alpha\underline{x} \end{cases}$

Adesso considero $\underline{x}$ scritto in verticale $\to$ $\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}$

COMBINAZIONI LINEARI

$\underline{x}^1, \underline{x}^2, \dots, \underline{x}^K \in \mathbb{R}^m$ e $C_1, C_2, \dots, C_K \in \mathbb{R}$

$C_1\underline{x}^1 + C_2\underline{x}^2 + \dots + C_K\underline{x}^K$ = COMBINAZIONE LINEARE

Esempio

STABILIRE SE $\begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ SI PUÒ ESPRIMERE COME COMBINAZIONI LINEARI DEI VETTORI $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

ovvero $\begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = C_1\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2C_1 \\ C_1 \\ C_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4C_2 \\ C_2 \\ -C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2C_1+4C_2 \\ C_1+C_2 \\ C_1-C_2 \end{bmatrix}$

allora $\begin{cases} 2C_1 + 4C_2 = 7 \to 2(2-C_2)+4C_2 = 7 \\ C_1 + C_2 = 2 \to C_1 = 2 - C_2 \\ C_1 - C_2 = -1 \to 2 - C_2 - C_2 = -1 \end{cases}$

$\Downarrow$

$\begin{cases} C_1 = 2 - C_1 \\ 4 + 2C_2 = 7 \\ -2C_2 = -3 \end{cases} \to \begin{cases} C_1 = 2 - C_2 \to C_1 = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2} \\ 2C_2 = 3 \\ 2C_2 = 3 \to C_2 = \frac{3}{2} \end{cases}$

Ho trovato dei coefficienti che soddisfano quell'uguaglianza

Esempio

STABILIRE SE $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ SI PUÒ ESPRIMERE COME COMBINAZIONE LINEARE DEI VETTORI $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = C_1\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1+2C_2 \\ C_1+C_2 \\ C_1+C_2 \end{bmatrix}$

$\begin{cases} C_1 + 2C_2 = -1 \\ C_1 + C_2 = 0 \\ C_1 + C_2 = 2 \end{cases}$ $\emptyset \to$ allora non è possibile

VETTORI LINEARMENTE INDIPENDENTI E DIPENDENTI (l.i. e l.d.)

Def. $\underline{x}^1, \underline{x}^2, \dots, \underline{x}^m \in \mathbb{R}^m$ si dicono l.d. quando uno di essi si può esprimere come combinazione lineari dei rimanenti, in caso contrario (nessuno di essi) i vettori si dicono linearmente ~~d~~ indipendenti.

$\underline{x}^1 = C_2\underline{x}^2 + C_3\underline{x}^3 + \dots + C_K\underline{x}^K$
$\underline{x}^1 - C_2\underline{x}^2 - C_3\underline{x}^3 - \dots - C_K\underline{x}^K = 0$

Esempio

$\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ → ALLORA l.d.

$\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

NB $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ non si esprime come c.l. degli altri MA NE BASTA UNO SOLO

Def. equivalente: $\underline{x}^1, \underline{x}^2, \dots, \underline{x}^K \in \mathbb{R}^m$ sono l.d. quando

1) si può avere $C_1\underline{x}^1 + C_2\underline{x}^2 + \dots + C_K\underline{x}^K = \underline{0}$ con almeno un coefficiente $C_i \neq 0$

Se invece 1) vale solo con $C_i = 0$, $\forall i$, i vettori sono l.i.

Se $C_1 \neq 0 \to \underline{x}^1 = -\frac{C_2}{C_1}\underline{x}^2 - \frac{C_3}{C_1}\underline{x}^3 - \dots - \frac{C_K}{C_2}\underline{x}^K$

↳ SI ESPRIME COME COMBINAZIONE LINEARE DEGLI ALTRI

Esempio

$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}$ l.d.?

$C_1\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + C_2\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + C_3\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} C_1+3C_2 \\ 2C_1+C_2-2C_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\begin{cases} C_1 + 3C_2 = 0 \\ 2C_1 + C_2 - 2C_3 = 0 \end{cases} \to \begin{cases} C_1 = -3C_2 \\ -6C_2 + C_2 - 2C_3 = 0 \end{cases} \to \begin{cases} // \\ -5C_2 - 2C_3 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} C_1 = -3C_2 \\ C_3 = -\frac{5}{2}C_2 \end{cases}$ → IL SISTEMA AMMETTE INFINITE SOLUZIONI ma posso ottenere l'uguaglianza anche con $C_1, C_2, C_3 \neq 0$, per cui sono l.d.

$$\overbrace{\underbrace{\underline{e}^1, \underline{e}^2, \dots, \underline{e}^m}_{l.i.}}^{\text{VETTORI FONDAMENTALI}} \in \mathbb{R}^m$$

$$c_1 \cdot \underline{e}^1 + c_2 \cdot \underline{e}^2 + \dots + c_m \cdot \underline{e}^m = \underline{0}$$

$$c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + c_m \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{allora} \quad \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow c_1, c_2, \dots, c_m = 0 \Rightarrow \text{sono } l.i.$$

NB 1) Se tra i vettori dati, uno è nullo, allora i vettori sono l.d.

2) Se due tra i vettori dati sono proporzionali, allora i vettori assegnati sono l.d.

3) Se uno tra i vettori dati è somma di altri, allora i vettori sono l.d.

4) Se $\underline{x}^1, \underline{x}^2, \dots, \underline{x}^K$ sono l.d., allora $\underline{x}^1, \underline{x}^2, \dots, \underline{x}^K, \underline{x}^{K+1}$ sono l.d. → SIGNIFICATO: se si aggiunge un vettore (o più vettori) ad un insieme di vettori l.d., l'insieme rimane l.d.

5) Se $\underline{x}^1, \underline{x}^2, \dots, \underline{x}^K$ sono l.i., allora $\underline{x}^1, \underline{x}^2, \dots, \underline{x}^{K-1}$ sono l.i. → SIGNIFICATO: tutti i sottoinsiemi di un insieme di vettori l.i. sono a loro volta l.i.

Esempio

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}}_{l.d.}$$

Esempio

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 5 \\ -18 \\ 27 \end{bmatrix}}_{l.d.}$$

GENERATORI E BASI PER $\mathbb{R}^m$

Def. $\underline{x}^1, \underline{x}^2, \dots, \underline{x}^K \in \mathbb{R}^m$ generano $\mathbb{R}^m$ quando ogni vettore di $\mathbb{R}^m$ si può esprimere come loro c.l.

Esempio

$$\underline{e}^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \ \underline{e}^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \ \underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

N.B. $\underline{e}^1, \underline{e}^2, \dots, \underline{e}^m \in \mathbb{R}^m$ generano $\mathbb{R}^m$.

Esempio

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \to \underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_1 + c_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} c_1 = x_1 \\ c_2 + c_1 = x_2 \end{cases} \to \begin{cases} c_1 = x_1 \\ c_2 = x_2 - x_2 \end{cases} \to \text{generano } \mathbb{R}^2$$

N.B. Se $\underline{x}^1, \underline{x}^2, \dots, \underline{x}^K \in \mathbb{R}^m$ generano $\mathbb{R}^m$, allora, se $\underline{x}^{K+1}$ è c.l. di $\underline{x}^1, \underline{x}^2, \dots, \underline{x}^K$, i vettori $\underline{x}^1, \underline{x}^2, \dots, \underline{x}^K, \underline{x}^{K+1}$ generano ancora $\mathbb{R}^m$.

Esempio

$$\left.\begin{matrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{matrix}\right\} \text{generano } \mathbb{R}^2$$

→ ma non sono una base

Def BASE per $\mathbb{R}^m$

Si dice che $\underline{x}^1, \underline{x}^2, \dots, \underline{x}^K \in \mathbb{R}^m$ sono una base per $\mathbb{R}^m$ quando:

1) generano $\mathbb{R}^m$

2) sono l.i.

N.B. i vettori fondamentali $\underline{e}^1, \underline{e}^2, \dots, \underline{e}^m \in \mathbb{R}^m$ generano $\mathbb{R}^m$ e sono l.i. ⇒ BASE e si dice BASE CANONICA.

TEOREMA !

1) Ogni base di $\mathbb{R}^m$ è costituita da m vettori.

2) m è il minimo numero di vettori che possono costituire un'insieme di generatori per $\mathbb{R}^m$

3) Ogni insieme di m vettori l.i. costituisce una base per $\mathbb{R}^m$.

4) m è il massimo numero di vettori estraibili da $\mathbb{R}^m$ che possono essere l.i.

ex. se prendo 3 vettori da $\mathbb{R}^2$ non sono l.i.

25/11/2024

Sottospazi vettoriali in $\mathbb{R}^n$

$\mathbb{R}^n$; $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$ $\quad \underline{x}+\underline{y} \in \mathbb{R}^n$

$\alpha \underline{x} \in \mathbb{R}^n$

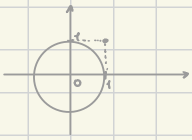
Def Un sottoinsieme non vuoto $S \subseteq \mathbb{R}^n$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ quando $\forall \underline{x}; \underline{y} \in S$ e $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ si ha:

i) $\underline{x}+\underline{y} \in S$

ii) $\alpha \underline{x} \in S$

Esempio

$A: \{\underline{x} = (x_1; x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$



$\underline{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \in A$ $\qquad \underline{x}+\underline{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \notin A$

$\underline{y} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in A$

prima proprietà non valida

$2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \notin A$ seconda proprietà non verificata

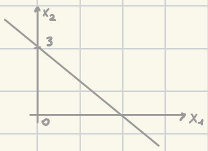
NON è un sottospazio in $\mathbb{R}^n$

N.B. Per la (ii), se $S \subseteq \mathbb{R}^n$ è uno sottospazio vettoriale, allora $\underline{0} \in S$

Esempio

$A = \left\{ \underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x_1 + x_2 = 3 \right\}$

non è un sottospazio $\rightarrow \underline{0} \notin A$



Teorema (H)

Sia S un sottospazio non vuoto di $\mathbb{R}^n$. Le due affermazioni seguenti sono equivalenti:

1) S è uno spazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$

2) $\alpha \underline{x} + \beta \underline{y} \in S$; $\forall \underline{x}; \underline{y} \in S$; $\forall \alpha; \beta \in \mathbb{R}$

Teorema

Se $S_1, S_2, \dots, S_k$ sono sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$; allora $S = S_1 \cap S_2 \cap \dots \cap S_k$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

Dimostrazione:

Siccome $S_1; S_2; \dots; S_k$ sono sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$;

$\underline{0} \in S_1$; $\underline{0} \in S_2$; ...; $\underline{0} \in S_k$

allora $\underline{0} \in S$ $\qquad$ S è non vuoto

la (2) (teorema precedente)

$\underline{x}; \underline{y} \in S$; $\alpha; \beta \in \mathbb{R}$

$\underline{x} \in S \iff \underline{x} \in S_1 \cap S_2 \cap \dots \cap S_k \implies \underline{x} \in S_i$; $i = 1; \dots; k$

$\underline{y} \in S \iff \underline{y} \in S_1 \cap S_2 \cap \dots \cap S_k \implies \underline{y} \in S_i$; $i = 1; \dots; k$

Siccome S_i è un sottospazio vettoriale per la (2) si ha

$\alpha \underline{x} + \beta \underline{y} \in S_i$; $i = 1; \dots; k$ $\qquad$ (se è vero sta anche nell'intersezione)

allora $\alpha \underline{x} + \beta \underline{y} \in S_1 \cap S_2 \cap \dots \cap S_k$

ciò vuol dire che S è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$

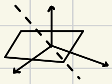
N.B. in $\mathbb{R}^2$ si dimostra che i sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^2$ sono:

1) $\mathbb{R}^2$

2) $S = \{\underline{0}\}$

3) Gli unici altri sottospazi di $\mathbb{R}^2$ sono le rette che passano per l'origine

N.B. in $\mathbb{R}^3$ si dimostra che i sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^3$ sono:

1) $\mathbb{R}^3$
2) $S = \{ \underline{0} \}$

3) Gli unici altri sottospazi di $\mathbb{R}^3$ sono le rette e i piani che passano per l'origine

Esempio

$A = \left\{ \underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} : x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 7 \right\}$

$\underline{0} \notin A \Rightarrow A$ non è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$

Sottospazi generati da un insieme di vettori

$\underline{x}^1; \underline{x}^2; \dots; \underline{x}^K \in \mathbb{R}^m$

$$\left\{ \underline{x} = c_1 \underline{x}^1 + c_2 \underline{x}^2 + \dots + c_K \underline{x}^K ; \; c_1; c_2; \dots; c_K \in \mathbb{R} \right\} \overset{\text{c.l. di vettori}}{=} S = \operatorname{Span} \{ \underline{x}^1; \underline{x}^2; \dots; \underline{x}^K \}$$

$S =$ sottospazio generato da $\underline{x}^1; \underline{x}^2; \dots \underline{x}^K$

N.B. (i) $\underline{x}; \underline{y} \in S$; $\underline{x} = c_1 \underline{x}^1 + c_2 \underline{x}^2 + \dots + c_K \underline{x}^K$

$\underline{y} = \delta_1 \underline{x}^1 + \delta_2 \underline{x}^2 + \dots + \delta_K \underline{x}^K$

$\underline{x} + \underline{y} = (c_1 + \delta_1) \underline{x}^1 + (c_2 + \delta_2) \underline{x}^2 + \dots + (c_K + \delta_K) \underline{x}^K \in S$

ancora una combinazione lineare di vettori appartenente ancora a S

(ii) $\gamma \underline{x} \in S$ $\quad \underline{x} = c_1 \underline{x}^1 + c_2 \underline{x}^2 + \dots + c_K \underline{x}^K$

$\gamma \underline{x} = \gamma c_1 \underline{x}^1 + \gamma c_2 \underline{x}^2 + \dots + \gamma c_K \underline{x}^K \in S$

ancora una combinazione lineare appartiene ancora a S

Quindi S è uno spazio vettoriale di $\mathbb{R}^m$

Esempio

$\underline{x}^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \underline{x}^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\quad \operatorname{Span} \{ \underline{x}^1; \underline{x}^2 \} = \mathbb{R}^2$

$S = \{ c_1 \underline{x}^1 + c_2 \underline{x}^2 ; c_1 ; c_2 \in \mathbb{R} \} = \mathbb{R}^2$

Esempio

$\underline{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \underline{x}_2^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \underline{x}^3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$S = \{ c_1 \underline{x}^1 + c_2 \underline{x}^2 + c_3 \underline{x}^3 ; c_1; c_2; c_3 \in \mathbb{R} \} = \mathbb{R}^2$

Esempio

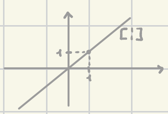
$\underline{x}^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \underline{x}^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \underline{x}^3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ tre vettori fondamentali di $\mathbb{R}^3$

generano $\mathbb{R}^3$ $\quad \operatorname{Span} \{ \underline{x}^1; \underline{x}^2; \underline{x}^3 \} = \mathbb{R}^3$

Esempio:

$\underline{x}^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$

$\operatorname{Span} \{ \underline{x}^1 \} = \{ c_1 \underline{x}^1 ; c_1 \in \mathbb{R} \}$



Esempio

$\underline{x}^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \underline{x}^2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ vettori di $\mathbb{R}^2$ linearmente indipendenti

$\operatorname{Span} \{ \underline{x}^1; \underline{x}^2 \} = \mathbb{R}^2$ sono una base per $\mathbb{R}^2$

insieme di tutte le loro combinazioni lineari

generano $\mathbb{R}^2$

Basi per un sottospazio

Def. $\underline{x}^1; \underline{x}^2; \dots; \underline{x}^k \in \mathbb{R}^m$ sono una base uno spazio vettoriale $S \subseteq \mathbb{R}^m$ quando:

i) generano S (ossia $S = \text{Span}\{\underline{x}^1; \underline{x}^2; \dots; \underline{x}^k\}$)

ii) sono linearmente indipendenti

NB. $\text{Span}\{\underline{x}^1; \underline{x}^2; \dots; \underline{x}^k\}$ insieme delle c.l.

$= \text{Span}\{\underline{x}^1; \underline{x}^2; \dots; \underline{x}^k; \underline{x}^{k+1}\}$

se $\underline{x}^{k+1}$ è combinazione lineare di $\underline{x}^1; \underline{x}^2; \dots; \underline{x}^k$

Esempio:

$\underline{x}^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \ \underline{x}^2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$

$\text{Span}\{\underline{x}^1; \underline{x}^2\} = \text{Span}\{\underline{x}^1\}$ $\quad \underline{x}^1; \underline{x}^2$ base? NO (non l.i.)

$\underline{x}^1$ base

TEOREMA

Se un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^m$ ammette una base costituita da K vettori, ogni altra base è costituita da K vettori.

Def. Il numero dei vettori che costituiscono una base per un sottospazio si chiama **dimensione** di S.

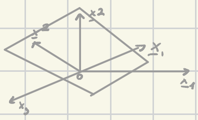
Esempio

$\underline{x}^1; \underline{x}^2; \underline{x}^3 \in \mathbb{R}^3$

$\underline{x}^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \ \underline{x}^2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \ \underline{x}^3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ linearmente dipendenti

$\text{Span}\{\underline{x}^1; \underline{x}^2; \underline{x}^3\} = \text{Span}\{\underline{x}^1; \underline{x}^2\}$

$\underline{x}^3 = \underline{x}^1 + \underline{x}^2$ combinazione lineare dei primi due



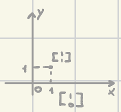
TEOREMA

$\underline{x}_1; \underline{x}_2; \dots; \underline{x}^k \in \mathbb{R}^m$

$\text{Span}\{\underline{x}^1; \underline{x}^2; \dots; \underline{x}^k\}$ è il più piccolo sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^m$ che contiene $\underline{x}^1; \underline{x}^2; \dots; \underline{x}^k$.

Esempio

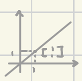
$\underline{x}^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \ \underline{x}^2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$



unico sottospazio che contiene questi due vettori → $\mathbb{R}^2$ stesso → ed è anche il più piccolo

Esempio

$\underline{x}^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$



Dimostrazione

i) $\text{Span}\{\underline{x}^1; \underline{x}^2; \dots; \underline{x}^k\}$ è uno spazio vettoriale di $\mathbb{R}^m$ (già visto)

Si ha $\{\underline{x}^1; \underline{x}^2; \dots; \underline{x}^k\} \subseteq \text{Span}\{\underline{x}^1; \underline{x}^2; \dots; \underline{x}^k\}$ perché $\text{Span}\{\underline{x}^1; \underline{x}^2; \dots; \underline{x}^k\} = \{c_1\underline{x}^1 + c_2\underline{x}^2 + \dots + c_k\underline{x}^k; \ c_1; c_2; c_3; \dots; c_k \in \mathbb{R}\}$

ii) Per mostrare che $\text{Span}\{\underline{x}^1; \underline{x}^2; \dots; \underline{x}^k\}$ è il più piccolo spazio vettoriale contenente $\underline{x}^1; \underline{x}^2; \dots; \underline{x}^k$ chiamiamo V questo spazio vettoriale

ovviamente $V \subseteq \text{Span}\{\underline{x}^1; \underline{x}^2; \dots; \underline{x}^k\}$ → ricorda ★

Mostro che $\text{Span}\{\underline{x}^1; \underline{x}^2; \dots; \underline{x}^k\} \subseteq V$

consideriamo $\underline{x} \in \text{Span}\{\underline{x}^1; \underline{x}^2; \dots; \underline{x}^k\}$

$\underline{x} = c_1\underline{x}^1 + c_2\underline{x}^2 + \dots + c_k\underline{x}^k$

$\underline{x}^1; \underline{x}^2 \in V$ allora $c_1\underline{x}^1 + c_2\underline{x}^2 \in V$

$\underline{x}^3 \in V$ allora $c_1\underline{x}^1 + c_2\underline{x}^2 + c_3\underline{x}^3 \in V$

Si ripete il processo

$c_1\underline{x}^1 + c_2\underline{x}^2 + c_3\underline{x}^3 + \dots + c_k\underline{x}^k \in V$

Dimostrato che $\text{Span}\{\underline{x}^1; \underline{x}^2; \dots; \underline{x}^K\} \subseteq V$ e quindi $V = \text{Span}\{\underline{x}^1; \underline{x}^2; \dots; \underline{x}^K\}$

Teorema

Siano $\underline{x}^1; \underline{x}^2; \dots; \underline{x}^K \in \mathbb{R}^m$

Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

1) $\underline{x}^1; \underline{x}^2; \dots; \underline{x}^K$ sono una base per $\mathbb{R}^m$

2) Ogni vettore di $\mathbb{R}^m$ si scrive in uno e un solo modo come combinazione lineare di $\underline{x}^1; \underline{x}^2; \dots; \underline{x}^K$

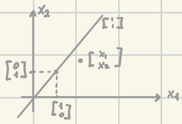
Esempio

$e_1; e_2 \in \mathbb{R}^2$

$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \underline{x}_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \underline{x}_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Esempio

$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ base per $\mathbb{R}^2$
(l.i)



$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\underline{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 \\ c_2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} c_2 = 3 \\ c_1 = -1 \end{matrix}$

Dimostrazione

1) ⇒ 2) Ipotesi: $\underline{x}^1; \underline{x}^2; \dots; \underline{x}^K$ base per $\mathbb{R}^n$ (quindi l.i) allora ogni vettore $\underline{x} \in \mathbb{R}^m$ si scrive come

$$\underline{x} = c_1 \underline{x}^1 + c_2 \underline{x}^2 + \dots + c_K \underline{x}^K$$

Per assurdo, supponiamo che sia anche

$$\underline{x} = c_1' \underline{x}^1 + c_2' \underline{x}^2 + \dots + c_K' \underline{x}^K$$

$$\underline{0} = \{(c_1 - c_1')\underline{x}^1 + (c_2 - c_2')\underline{x}^2 + (c_K - c_K')\underline{x}^K\}$$

siccome $\underline{x}^1; \underline{x}^2; \dots; \underline{x}^K$ sono l.i. si ha $c_1 - c_1' = c_2 - c_2' = c_K - c_K' = \dots = 0$

2) ⇒ 1) Ipotesi: ogni vettore $\underline{x} \in \mathbb{R}^m$ si scrive in uno ed un solo modo come combinazione lineare di $\underline{x}^1; \underline{x}^2; \dots; \underline{x}^K$

ovviamente $\underline{x}^1; \underline{x}^2; \dots; \underline{x}^K$ generano $\mathbb{R}^m$

$$\underline{0} = c_1 \underline{x}^1 + c_2 \underline{x}^2 + \dots + c_K \underline{x}^K \quad *$$

$*$ è verificata per $c_1 = c_2 = \dots = c_K = 0$

Siccome questo è l'unico modo per scrivere $\underline{0}$ come combinazione lineare di $\underline{x}^1; \underline{x}^2; \dots; \underline{x}^K$ si deduce che essi sono linearmente indipendenti.

26/11/2024

Le Matrici

Def Una tabella di numeri ordinati secondo righe e colonne

$$\underset{m\times n}{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & a_{m4} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

m righe —
n colonne |

$$\underset{3\times 4}{A} = \begin{bmatrix} 8 & 3 & 7 & 5 \\ -2 & 1 & 0 & -1 \\ 8 & -7 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

diagonale secondaria

diagonale principale

Se $m \neq n$ la matrice si dice rettangolare

Matrice Quadrate

$m = n$ (ordine della matrice)

Esempio

$$\underset{3\times 3}{A} = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 21 \\ -5 & 0 & 1 \\ 18 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

Matrici Diagonali

matrice quadrato con $a_{ij} = 0$ con $i \neq j$ e $a_{ii} \neq 0$ per almeno un i

Esempio

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matrici Triangolari

Elementi diversi da zero stanno tutti sopra/sotto la diagonale della matrice stessa

Esempio

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Def matrice triangolare $\iff a_{ij} \leq 0;\ \forall i \leq j$ oppure $\forall i \geq j$

Matrice Identità

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots 0 \end{bmatrix}$$

tutti gli 1 sulla diagonale

Matrice Trasposta

$$\underset{3\times 2}{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \quad \underset{2\times 3}{A^T} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$ → si scambiano ordinatamente le righe con le colonne

N.B. $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$

$$\underset{n\times 1}{\underline{x}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \underset{1\times n}{\underline{x}^T} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \end{bmatrix}$$

Operazioni con le Matrici

1) Somma di Matrici

$$\underset{m\times n}{A} + \underset{m\times n}{B} = \underset{m\times n}{C}$$

$$\underset{3\times 2}{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \quad \underset{3\times 2}{B} = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ -5 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \longrightarrow A + B = \begin{bmatrix} 2 & 9 \\ -6 & -2 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}$$

Si somma solo se l'ordine è lo stesso => somma degli elementi corrispondenti

2) Prodotto per un numero

$\lambda \underset{m\times n}{A}$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$\lambda A_{m\times n} = \underset{m\times n}{C}$ → sempre dello stesso tipo

Valgono la proprietà:
- somma: associativa e commutativa
- prodotto: distributive

Esempio $\underset{3\times 2}{3A} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -3 & -6 \\ 0 & 15 \end{bmatrix}$

3) Prodotto tra matrici

Si può eseguire se $\rightarrow \underset{m \times n}{A} \quad \underset{n \times p}{B}$

numero colonne uguale al numero righe della seconda matrice

$\underset{m \times n}{A} \cdot \underset{n \times p}{B} = \underset{m \times p}{C}$

> • Due matrici si dicono <u>conformabili</u> per il prodotto solo se il numero di colonne della prima matrice è uguale al numero di righe della seconda

$$\underset{m\times n}{A} = [\dots] \; ; \; \underset{n \times p}{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ b_{31} & b_{32} & \cdots & b_{3p} \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix}$$

C_{ij} = prodotto interno i righe di A, colonne j di B

<u>Esempio</u>

$$\underset{\substack{m \times n \\ (3\times 2)}}{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \qquad \underset{\substack{2\times 4 \\ (n \times p)}}{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\underset{3\times 2}{A} \cdot \underset{2\times 4}{B} = \underset{3\times 4}{C} \qquad \underset{3\times 4}{C} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} \end{bmatrix}$$

$C_{11} = 1+4 = 5$ $\quad C_{21} = 5$ $\quad C_{31} = 10$

$C_{12} = 2+8 = 10$ $\quad C_{22} = 10$ $\quad C_{32} = 20$

$C_{13} = 0$ $\quad C_{23} = 0$ $\quad C_{33} = 0$

$C_{14} = -1+10 = 9$ $\quad C_{24} = 16$ $\quad C_{34} = 25$

$$C_{3\times 4} = \begin{bmatrix} 5 & 10 & 0 & 9 \\ 5 & 10 & 0 & 16 \\ 10 & 20 & 0 & 25 \end{bmatrix}$$ risultato del prodotto di 2 matrici

<u>Esempio</u>

$\underset{3\times 1}{\underline{x}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$; $\underset{3\times 1}{\underline{y}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ $\quad \underset{1\times 3}{\underline{x}^t} = [1\ 2\ 3]$ così si può fare il prodotto

$\underset{1\times 1}{\underline{x}^t \cdot \underline{y}} = [7]$ un solo valore $(-1\times 1) + (1\times 2) + (2\times 3) = 7$ prodotto interno

$\underset{1\times 3}{y^t} = [-1\ 1\ 2]$ si può fare $x \cdot y^t$

$\underset{3\times 3}{x \cdot y^t} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 4 \\ -3 & 3 & 6 \end{bmatrix}$ $\quad x \cdot y^t$ = matrice 3×3

Proprietà del prodotto tra matrici

1) Associativa $\quad (A \cdot B)C = A(B \cdot C)$

2) Distributiva $\quad A(B+C) = AB + AC$
$(B+C)A = BA + CA$

<u>N.B.</u> Il prodotto tra matrici non è commutativo (cioè se AB è definito, BA può non esserlo)
$\downarrow$
ECCEZIONE = Matrice identità (commuta)

$\underset{2\times 2}{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \underset{2\times 3}{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

$\underset{2\times 2 \; 2\times 3}{A \times B}$ si può fare $\rightarrow$ ma $\underset{2\times 3 \; 2\times 2}{B \times A}$ <u>non</u> si può fare $\rightarrow$ quindi il prodotto commutativo!

$3 \neq 2$

<u>Esempio</u>

$\underset{2\times 2}{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \underset{2\times 2}{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$\underset{2\times 2}{A} \cdot \underset{2\times 2}{B} = \underset{2\times 2}{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \underset{2\times 2}{B} \cdot \underset{2\times 2}{A} = \underset{2\times 2}{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad \underset{2\times 2}{C} \neq \underset{2\times 2}{D}$

Anche se il prodotto è per entrambi i versi ??? non è detto che dia la stessa matrice prodotto

Altra proprietà caratteristica $\rightarrow$ Due matrici non nulle possono originare una nulla

$A \cdot B = C \rightarrow$ matrice nulla (tutti zero)

<u>N.B.</u> $\underset{m \times n}{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad \underset{n\times 1}{\underline{x}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$

$$\mathbb{R}^m \ni \underset{m\times 1}{A\underline{x}} = \begin{bmatrix} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} \cdot x_n \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} \cdot x_n \\ \vdots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \dots + a_{mn} \cdot x_n \end{bmatrix} = x_1 \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}}_{} + x_2 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{22} \\ a_{32} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + \dots + x_n \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{2n} \\ a_{3n} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}$$

combinazione lineare di vettori $\rightarrow$ colonne di a con coefficienti componenti del vettore $\underline{x}$

Problema

$\underline{x}^1; \underline{x}^2; \dots; \underline{x}^m \in \mathbb{R}^m$

Stabilire se sono linearmente indipendenti o linearmente dipendenti
(= uno multiplo dell'altro)

Esempio

$\mathbb{R}^2 \quad \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \underline{x}^1; \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \underline{x}^2$

Sono linearmente dipendenti se $\boxed{\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = K\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}}$

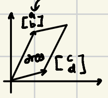
$\begin{cases} a = Kc \\ b = Kd \end{cases} \Rightarrow \boxed{\frac{a}{b} = \frac{c}{d}} \qquad ad = bc \rightarrow \underline{ad - bc = 0}$

$A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ matrice quadrata di ordine due

$\underbrace{ad - bc}$ $= \det A$
- Se da 0 (zero) sono linearmente dipendenti
- Se è diverso da zero ($\neq 0$) sono linearmente indipendenti

Si deve calcolare il det.

NB: in $\mathbb{R}^2$



$$\underset{m \times n}{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3m} \\ & & & \end{bmatrix}$$

N.B. Indichiamo con A_{ij} la matrice quadrata ottenuta cancellando la riga i e la colonna j.

Esempio

$$\underset{4 \times 4}{A} = \begin{bmatrix} -3 & -4 & -4 & \dots \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 5 & 4 & 3 \\ 2 & 9 & -1 & 8 \end{bmatrix} \longrightarrow A_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & 8 \end{bmatrix}$$

senza riga 1 e colonna 2

Def. Se $\underset{m \times m}{A}$ è una matrice quadrata, il determinante di A (det A) è definito come:

i) Se $A = [a_{11}]$ ($m=1$), allora $\det A = a_{11}$

ii) Se $m \geq 2$, allora $\det A = \sum_{j=1}^{m} a_{1j} (-1)^{1+j}$

Esempio

$\underset{2 \times 2}{A} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ risultato determinante matrice $\underset{2 \times 2}{A}$

$\det A = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} (-1)^{1+j} \qquad \det A_{1j} = a_{11} (-1)^{1+1} \det A_{11} + a_{12} (-1)^{1+2} \det A_{12} = a \cdot 1 \cdot d + c(-1) \cdot b = ad - bc$

Esempio

$\underset{3 \times 3}{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ -2 & 4 & 5 \\ -4 & 6 & 1 \end{bmatrix}$ Calcoliamo il determinante

$\det A = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} (-1)^{1+j} \det A_{12} + 7(-1)^{1+3} \det_{13} = \det \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} + (-3) \det \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} + 7 \det \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -4 & 6 \end{bmatrix} = (4-30) - 3(-2+20) + 7(-12+16) = -26 - 3(18) + 7(4) = -26 + 28 - 54 = -52$ linearmente indipend.

$\det A_{ij}$ = minore complementare di a_{ij}

$(1)^{1+j} \det A_{ij}$ = complemento algebrico di a_{ij}

$\det A \rightarrow$ è la somma dei prodotti degli elementi della prima riga di A per i rispettivi complementari algebrici.

TEOREMA (di Laplace)

Il determinante di una matrice quadrata A si ottiene come somma dei prodotti degli elementi di una riga (o di una colonna) di A su i rispettivi complementari algebrici.

$$\det A = -2(-1)^{2+1} \det A_{21} + 4(-1)^{2+2} \det A_{22} + 5(-1)^{2+3} \det A_{23} = 2 \det \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} + 4 \det \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} - 5 \det \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 6 \end{bmatrix} = 2(3-42) + 4(1+28) - 5(6+12) = \underline{-52}$$

N.B. Se $\det A \neq 0 \Rightarrow A$ è non-singolare

Se $\det A = 0 \Rightarrow A$ è singolare

> N.B. Se la matrice è <u>quadrata di ordine 3</u> si può usare la regola di Sarrus (valida <u>solo</u> per matrici di ordine 3) o il metodo di Laplace.
>
> Per calcolare il determinante di una matrice quadrata di ordine 4 o superiore si usa il metodo di Laplace (preferibile anche nel caso di matrici di ordine 3).

Proprietà di det A

Teorema

Sia A una matrice quadrata le seguenti affermazioni sono equivalenti:

1) $\det = 0$
2) le colonne di A sono linearmente dipendenti
3) le righe di A sono linearmente dipendenti

Ricordiamo definizione vettori ortogonali: due vettori $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^m$ si dicono ortogonali (o perpendicolari) se: $\underline{x} \cdot \underline{y} = 0$

Def. $\{x_1; \dots; x_m\} \subseteq \mathbb{R}^m$ è un insieme ORTOGONALE se $\underline{x}_i \cdot \underline{x}_j = 0 \quad \forall i, j = 1, \dots, m$ con $i \neq j$

Se $\|\underline{x}_i\| = 1 \quad \forall i = 1, \dots, m,$ l'insieme di vettori è ortogonale.

Teorema

Se $\{\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_m\} \subseteq \mathbb{R}^m$ è un insieme ortogonale $\Rightarrow$ un insieme di vettori linearmente indipendenti.

Teorema (coefficienti di Fourier) (H)

Siano $\{\underline{a}_1; \dots; \underline{a}_m\} \subseteq \mathbb{R}^m$ un insieme ortogonale. Allora $\forall \underline{x} \in \mathbb{R}^m$ $\underline{x} = (\underline{x} \cdot \underline{a}_1)\, \underline{a}_1 + (\underline{x} \cdot \underline{a}_2) \cdot \underline{a}_2 + \dots + (\underline{x} \cdot \underline{a}_n) \cdot \underline{a}_n = \sum_{k=1}^{m} (\underline{x} \cdot \underline{a}_k)\, \underline{a}_k$;

$(\underline{x} \cdot \underline{a}_k)$ sono i coefficienti di Fourier di $\underline{x}$ rispetto alla base $\{\underline{a}_1; \dots; \underline{a}_m\}$

Def: un insieme di vettori ortogonale composto da vettori di norma unitaria si dice ortonormale.

Ex. $\{e^1, e^2, \dots, e^n\}$

Esempio

Sia $\left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^2$

$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$

$\left\| \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1$

$\left\| \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \right\| = 1$

Quindi è una base ortogonale di $\mathbb{R}^2$.

Sia $x = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$. Trova i coeff. di Fourier

$\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \frac{2}{\sqrt{2}} - \frac{3}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = -\frac{2}{\sqrt{2}} - \frac{3}{\sqrt{2}} = -\frac{5}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} - \frac{5}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

Determinante di matrici 3×3 con la regola di Sarrus

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33})$$

Esempio

$$\det A = \det \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \\ -2 & 2 \end{matrix} = 0 + 8 + 6 - (0 + 4 - 24) = 34$$

Esercizi

1) Sia $S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^4$

Descrivere Span(S) e trovare una base di Span(S).

$\text{Span}(S) = \left\{ \underline{x} \in \mathbb{R}^4 : \underline{x} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \delta \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}, \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R} \right\}$

$\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ allora escludo il terzo

$\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ allora escludo il quarto

sono linearmente dipendenti

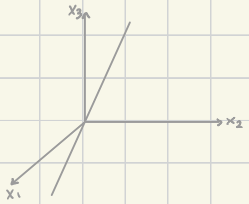
$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ non sono uno multiplo dell'altro $\Rightarrow$ sono linearmente indipendenti

$\Rightarrow \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ è una base di Span(S) $\Rightarrow \dim(\text{Span}(S)) = 2$

Esercizio 2

$W = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 = 0,\ x_3 = 0 \right\}$

Dimostrare che W è uno sottospazio di $\mathbb{R}^3$ e trovare la sua dimensione.



Siano $\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ e $\underline{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$ con $\underline{x}, \underline{y} \in W$ e siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Dobbiamo far vedere che $\alpha \underline{x} + \beta \underline{y} \in W$

$$\alpha \underline{x} + \beta \underline{y} \in W \Leftrightarrow \alpha \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x_1 + \beta y_1 \\ \alpha x_2 + \beta y_2 \\ \alpha x_3 + \beta y_3 \end{bmatrix} \in W$$

Quindi il vettore perché $\in W$, deve avere

$$\Leftrightarrow \alpha x_1 + \beta y_1 + \alpha x_2 + \beta y_2 = 0, \quad \alpha x_3 + \beta y_3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha \underbrace{(x_1 + x_2)}_{\substack{=0 \\ \text{perché} \\ \underline{x} \in W}} + \beta \underbrace{(y_1 + y_2)}_{\substack{=0 \\ \text{perché} \\ \underline{y} \in W}} = 0, \quad \alpha \underbrace{x_3}_{\substack{=0 \\ \text{perché} \\ \underline{x} \in W}} + \beta \underbrace{y_3}_{\substack{=0 \\ \text{perché} \\ \underline{y} \in W}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0 \checkmark \qquad \alpha \cdot 0 + \beta 0 = 0 \checkmark$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in W \Leftrightarrow x_1 = -x_2, \ x_3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -t \\ t \\ 0 \end{bmatrix}, \ t \in \mathbb{R} = t \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\text{base di } W}, \ t \in \mathbb{R} \Rightarrow W \text{ ha dimensione } 1$$

Esempio

$W = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0 \right\}$ Base di W?

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in W \Leftrightarrow x_1 = -2x_2 + 4x_3 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\beta + 4\alpha \\ \beta \\ \alpha \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \qquad \text{base } \left\{ \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

Def. Sia $A \in M(m)$. A è invertibile se $\exists$ una matrice $B \in M(m)$ tale che $AB = BA = I_m$

$\hookrightarrow$ insieme di matrici $m \times m$. $M(m, m) =$ matrici $m \times m$

TEOREMA (Matrice cofattori) (H)

$A \in M(m)$ è invertibile $\Leftrightarrow \det A \neq 0$.

La matrice inversa A^{-1} di una matrice A invertibile è la matrice $A^{-1} = \frac{1}{\det A} (A^*)^T$ dove A^* è la matrice dei cofattori di A.

A^* è la matrice che si ottiene con a_{ij} sostituito da $(-1)^{i+j} \det A_{ij}$, dove A_{ij} è la matrice che si ottiene da A cancellando la i-esima riga e la j-esima colonna.

Esempio

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{matrix} = -1 - 4 - (6) = -11$$

$$A^* = \begin{bmatrix} (-1)^{1+1}(-7) & (-1)^{1+2}(-1) & (1)^{1+3} \cdot 2 \\ (-1)^{2+1}(4) & (-1)^{2+2}(-1) & (-1)^{2+3}(2) \\ (-1)^{3+1} \cdot 2 & (-1)^{3+2} \cdot 5 & (-1)^{3+3} \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 1 & 2 \\ -4 & -1 & -2 \\ 2 & -5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{11} \begin{bmatrix} -7 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & -5 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{11} & \frac{4}{11} & -\frac{2}{11} \\ -\frac{1}{11} & \frac{1}{11} & \frac{5}{11} \\ -\frac{2}{11} & \frac{2}{11} & -\frac{1}{11} \end{bmatrix}$$

Oss.: Se $A \in M(2)$, $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ se $\det A = ad - bc \neq 0 \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

Esempio

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\det A = 5 - 6 = -1 \Rightarrow A^{-1} = -\begin{bmatrix} 5 & -5 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 5 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Controprova

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \checkmark$$

TEOREMA (Coefficienti di Fourier) - H

Determinazione dei coefficienti di un vettore di $\mathbb{R}^m$ rispetto ad una base ortonormale

Sia $\{\underline{x}^1, \dots, \underline{x}^m\}$ una base ortonormale di $\mathbb{R}^m$.

$\forall\, \underline{y} \in \mathbb{R}^m$ si ha

$$y = (y \cdot x^1) \cdot x^1 + (y \cdot x^2) x^2 + \dots + (y \cdot x^m) x^m = \sum_{i=1}^{m} (y \cdot x^i) x^i$$

$$\underline{y} = \sum_{i=1}^{m} (\underline{y} \cdot \underline{x}^i) \cdot \underline{x}^i$$

I coefficienti $\underline{y} \cdot \underline{x}^i$ sono detti coefficienti di Fourier di $\underline{y}$ rispetto alla base ortonormale $\{\underline{x}^1, \dots, \underline{x}^m\}$.

DIM Siccome $\{\underline{x}^1, \dots, \underline{x}^m\}$ è una base, esistono m scalari $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ tali che

$$\underline{y} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \underline{x}^i$$

Per $j = 1, \dots, m$ il prodotto interno $\underline{y} \cdot \underline{x}^j$ è dato da:

$$\underline{y} \cdot \underline{x}^j = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i (\underline{x}^i \cdot \underline{x}^j)$$

Siccome $\{\underline{x}^1, \dots, \underline{x}^m\}$ è ortonormale, si ha:

$$\underline{x}^i \underline{x}^j = \begin{cases} 0, & \text{se } i \neq j \\ 1, & \text{se } i = j \end{cases}$$

Pertanto $\underline{y} \cdot \underline{x}^j = \alpha_j$ e la dimostrazione è conclusa.

C.V.D.

TEOREMA (determinante della matrice inversa). - H

Sia A una matrice quadrata con $\det A \neq 0$.

Si ha

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$$

DIM La matrice A^{-1} è tale che

$$A \cdot A^{-1} = I \quad \text{identità } (I_m)$$

Per il teorema di Binet si ha

$$\det(A \cdot A^{-1}) = \det A \cdot \det A^{-1}$$

Quindi

$$\det A \cdot \det A^{-1} = \det I = 1$$

da cui

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$$

C.V.D.

29/11/2024

Determinante di una matrici

Proprietà Det A

1. Se una riga o una colonna di A sono nulle, allora $\det A = 0$
2. Se due righe o due colonne di A sono proporzionali (vale anche se sono uguali), allora $\det A = 0$
3. Se una riga (o una colonna) è somma di altre righe (o colonne), allora $\det A = 0$
4. $\det A = \det A^T$
5. Se $\underset{m\times m}{A}, \underset{m\times m}{B}$, allora $\det A\cdot B = (\det A)(\det B)$ [Teorema di Binet]
6. $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$ (Se $\det A \neq 0$)

Problema

$x^1, x^2, \dots, x^K \in \mathbb{R}^m$, stabilire se sono l.i. o l.d.

Rango di una Matrice

- Sottomatrici

$$\underset{3\times 4}{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & 5 & 7 \\ 0 & 3 & 8 & 1 \end{bmatrix}$$ mom quadrata

Se cancello un tot di righe e un tot di colonne ottengo delle matrici diverse, dette SOTTOMATRICI, che possono essere quadrate o mom quadrate

Sottomatrici quadrate

N.B. Si dice minore di una matrice quadrata il determinante di una sottomatrice quadrata

Esempio

$\det \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 7 & 1 \end{bmatrix} = 5 - 56 = -51$

è un minore di ordine 2 della matrice A

Def. Se A è una matrice, il rango di A ($r(A)$) è il massimo ordine dei minori mom nulli della matrice A.

Esempio

$\underset{3\times 3}{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}$ $\det A = 0$

$\det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = 3 \neq 0 \rightarrow r(A) = 2$

Esempio

$\underset{4\times 3}{A} = \begin{bmatrix} -1 & -3 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 6 \end{bmatrix}$

$\det \begin{bmatrix} -2 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 6 \end{bmatrix}\begin{matrix} -2 & 2 \\ 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{matrix} = 0$

$\det \begin{bmatrix} -1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 6 \end{bmatrix}\begin{matrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{matrix} = 0$ $\det \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & 6 \end{bmatrix}\begin{matrix} 1 & -3 \\ -2 & 2 \\ 3 & 0 \end{matrix} = 0$

$\det \begin{bmatrix} -1 & -3 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{matrix} 1 & -3 \\ -2 & 2 \\ 0 & 1 \end{matrix} = 0$ Non ci sono minori di ordine $3 \neq 0$

$\det \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = -3 \neq 0$ Minore mon nullo di ordine 2 → Rango di A è 2 $r(A) = 2$

Metodo di Kroneker per il calcolo del Rango (+ Kroneker Capelli)

È un metodo per passi

1. Considera un minore mom nullo di ordine K.

Nell'esempio di prima

$\det \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = -4 \neq 0$ $(K=2)$ $r(A) \geq K$

2. Orla il minore di K al punto 1, in tutti i modi possibili, per formare minori di ordine K+1.

$$\det\begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det\begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

3. Se i minori di ordine K+1 trovati al punto 2 sono tutti nulli concludo che $r(A)=K$

$r(A)=2$

4. Se uno dei minori di ordine K+1 trovati al punto 2 è $\neq 0$, allora $r(A) \geq K+1$. Riparti dal punto 2) con $K=K+1$

Teorema

Il rango di A è il massimo numero di colonne (o di righe) linearmente indipendenti {l.i.} che si possono estrarre da A.

Considero 3 vettori $\underline{a}^1, \underline{a}^2, \underline{a}^3 \in \mathbb{R}^4$

Considero $\text{Span}\{\underline{a}^1, \underline{a}^2, \underline{a}^3\} = \text{Span}\{\underline{a}^1, \underline{a}^2\}$ perché $\underline{a}^3$ è l.d. di a^1, a^2 quindi si può riscrivere come combinazione lineare.

$\underline{a}^1, \underline{a}^2$ base

$\dim \text{Span}\{\underline{a}^1, \underline{a}^2, \underline{a}^3\} = 2 = r(A)$.

Teorema

Il $r(A)$ coincide con la dimensione del sottospazio generato dalle colonne di A.

Sistemi di equazioni lineari

- Incognite di 1° grado, moltiplicate per incognite

<u>Esempio</u>

① $\begin{cases} x_1+x_2=1 \\ 2x_1+2x_2=0 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1+x_2=1 \\ x_1+x_2=0 \end{cases}$ Impossibile

② $\begin{cases} x_1+x_2=1 \\ x_1-x_2=0 \end{cases}$ $\begin{cases} x_2=x_1 \\ 2x_2=1 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1=\frac{1}{2} \\ x_2=\frac{1}{2} \end{cases}$ Possibile e determinato

③ $\begin{cases} x_1+x_2=1 \\ 2x_1+2x_2=2 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1+x_2=1 \\ x_1+x_2=1 \end{cases}$ $\begin{cases} x_2=1-x_1 \\ 0=0 \end{cases}$ Possibile e indeterminato

↓

ha infinite soluzione

- m equazioni; n incognite

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\dots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

Forma Estesa

Forma matriciale di un sistema di eq. lineare

$\underbrace{\underline{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n}_{\text{vettore delle incognite}}$; $\underbrace{\underline{b}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m}_{\text{vettori dei termini noti}}$; $A=\begin{bmatrix} a_{11}; & a_{12}; & \dots & a_{1n} \\ a_{21}; & a_{22}; & \dots & a_{2n} \\ a_{m1}; & a_{m2}; & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$

$A\underline{x}=\underline{b}$

$$\underset{m\times 1}{A\,\underline{x}} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\dots+a_{mn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Funzioni

e

Sistemi

lineari

Sistemi di equazioni lineari

$$A\underline{x} = \underline{b}$$

$\underset{m \times n}{A} \; \underset{n \times 1}{\underline{x}} =$ Combinazione lineare delle colonne di A con coefficienti dati dalle componenti di $\underline{x}$

$$\underline{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$\underset{m \times n}{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \text{matrice completa}$$

Teorema (di Kronecker-Capelli)

Il sistema $A\underline{x} = \underline{b}$ è possibile se e solo se $r(A) = r(A|\underline{b})$

DIM

$A\underline{x} = \underline{b}$ è possibile se e solo se $\underline{b}$ è combinazione lineare di A ovvero se e solo se il numero di colonne linearmente indipendenti di A e di $A|\underline{b}$ coincide.

Teorema

Sia $\underset{m \times n}{A}\underline{x} = \underline{b}$ un sistema possibile $\left(r(A) = r(A|\underline{b})\right)$ Se $r(A) \neq r(A|\underline{b})$ è IMPOSSIBILE (non ammette soluzioni)

1) Se $r(A) = n$, allora $A\underline{x} = \underline{b}$ è determinato; (n = n° incognite)
2) Se $r(A) < n$, allora $A\underline{x} = \underline{b}$ è indeterminato (ammette $\infty^{n-r(A)}$ soluzioni) dove $(n-r)$ sono i gradi di libertà

Esempio
$$\begin{cases} x_1 - x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$$

$$\underset{3 \times 4}{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 1 \; ; \; r(A) = 2$$

$$\left.\begin{aligned} &\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} = 0 \\ &\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow r(A) = 2$$

$$A|\underline{b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} = 2 + 1 + 0 - (2 + 0 + 0) = 1 \neq 0$$

$r(A|\underline{b}) = 3$

I ranghi sono diversi $\rightarrow$ SISTEMA IMPOSSIBILE

Esempio:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 = 2 \end{cases}$$

Sistema possibile e indeterminato

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$; $\det A = 0 \Rightarrow r(A) = 1$; $r(A) < 2$ $\quad \infty^1$ soluzioni

$\underline{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$; $A|\underline{b} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$; $r(A|\underline{b}) = 1$

Sistemi lineari omogenei

→ sempre possibili

$\underset{m \times n}{A}\, \underline{x} = \underline{0}$ ($\underline{b} = 0$) $\quad$ m righe, n colonne

$\underline{x} = \underline{0}$ è soluzione

$\Downarrow$

$A\underline{x} = \underline{0}$ è possibile

Teorema (delle soluzioni di un sistema omogeneo)

1) Un sistema lineare omogeneo è sempre possibile;

2) Se $A\underline{x} = \underline{0}$ è determinato, allora ammette solo la soluzione $\underline{x} = 0$;

3) Se $A\underline{x} = 0$ è indeterminato, le sue soluzioni costituiscono un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ di dimensione $\underbrace{n - r(A)}_{\text{gradi di libertà}}$.

ammette ∞^{n-r} soluzioni

Esempio

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

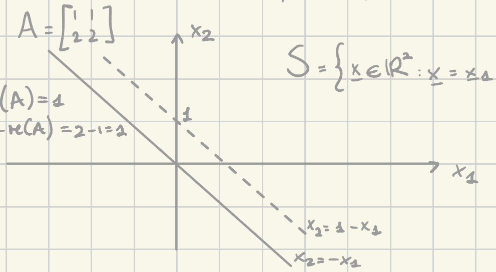
$x_2 = -x_1$; $\begin{bmatrix} x_1 \\ -x_1 \end{bmatrix}$; $x_1 \in \mathbb{R}$

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

$r(A) = 1$

$n - r(A) = 2 - 1 = 1$

$S = \left\{ \underline{x} \in \mathbb{R}^2 : \underline{x} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}; x_1 \in \mathbb{R} \right\}$



N.B. $A\underline{x} = \underline{b}$

$A\underline{x} = \underline{0}$ (sistema omogeneo associato ad $A\underline{x} = \underline{b}$)

Esempio

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$$

$x_2 = 1 - x_1$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ 1 - x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ -x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

soluzioni del sistema non omogeneo — soluzioni del sistema omogeneo — una soluzione del sistema non omogeneo

Teorema $A\underline{x} = \underline{b}$ ($\underline{b} \neq \underline{0}$): Struttura delle soluzioni di un sistema lineare non omogeneo $A\underline{x} = \underline{b}$ noto il Nucleo (Ker), cioè note le soluzioni del sistema omogeneo $A\underline{x} = \underline{0}$

1) Se $\underline{x}^1, \underline{x}^2$ sono soluzioni di $A\underline{x} = \underline{b}$, allora $\underline{z} = \underline{x}^1 - \underline{x}^2$ è soluzione di $A\underline{x} = \underline{0}$;

(Dim $A\underline{x}^1 = \underline{b}$; $A\underline{x}^2 = \underline{b}$; $A(\underline{x}^1 - \underline{x}^2) = A\underline{x}^1 - A\underline{x}^2 = \underline{b} - \underline{b} = \underline{0}$)

2) Se $\underline{x}^1$ è soluzione di $A\underline{x} = \underline{b}$, tutte le soluzioni di $A\underline{x} = \underline{b}$, si ottengono come $\underline{x} = \underline{v} + \underline{x}^1$, dove $\underline{v}$ è soluzione di $A\underline{x} = \underline{0}$

Sistemi lineari quadrati

$\underset{m \times m}{A}\,\underline{x} = \underline{b}$

Oss: un sistema è detto di Cramer (o crameriano) se la matrice dei coefficienti A è quadrata con determinante non nullo

Teorema (di Cramer) (H)

Sia $A\underline{x} = \underline{b}$ un sistema quadrato.
Il sistema $A\underline{x} = \underline{b}$ è determinato se e solo se $\det A \neq 0$. In questo caso, l'unica soluzione si può scrivere come $\underline{x} = A^{-1} \cdot \underline{b}$.

Esempio $A\underline{x} = \underline{b}$

$$\underset{3\times3}{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix};\ \underline{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$\det A = -2-2-2-(1-8+1) = -6+6 = 0$ Sistema non determinato.

$$\left.\begin{array}{l} \det \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = 3 \neq 0 \Rightarrow r(A) = 2 \\ A|\underline{b} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \end{bmatrix};\ r(A|\underline{b}) = 2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Sistema possibile} \\ \infty^{1} \text{ soluzioni} \end{array}$$

$$\det \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = 0$$

Regola di Cramer

Sia $A\underline{x} = \underline{b}$ un sistema quadrato con $\det A \neq 0$.
L'unica soluzione $\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}$

Si può calcolare come

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A}, \quad i = 1, \dots, m$$

dove A_i è la matrice che si ottiene sostituendo alla colonna i di A, il vettore $\underline{b}$ dei termini noti.

Esempio

$A\underline{x} = \underline{b}$

$$\underset{3\times3}{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix};\ \underline{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$\det A = -7 \Rightarrow$ sistema determinato

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix};\ x_1 = \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{15}{-7} = -\frac{15}{7}$$

$$\det A_1 = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix} = 3+8+0-(0-4+0) = 15$$

$$x_2 = \frac{\det A_2}{-7} = +\frac{11}{7}$$

$$\det A_2 = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = 0+2+0-(0+4+9) = -11$$

$$x_3 = \frac{\det A_3}{-7} = +\frac{17}{7}$$

$$\det A_3 = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix} = 2+0-6-(1+12+0) = -17$$

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} -\frac{15}{7} \\ \frac{11}{7} \\ \frac{17}{7} \end{bmatrix}$$

TEOREMA (Cramer) - H

Sia A una matrice quadrata di ordine n.
Il sistema lineare

$$A\underline{x} = \underline{b}$$

ha un'unica soluzione $\forall \underline{b} \in \mathbb{R}^n$ se e solo se la matrice A è invertibile (ossia $\det A \neq 0$).
In questo caso la soluzione è data da

$$\underline{x} = A^{-1}\underline{b}.$$

DIM Consideriamo l'operatore lineare

$$T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \quad \text{definito da} \quad T(\underline{x}) = A\underline{x}, \ \forall \underline{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Il sistema lineare $A\underline{x} = \underline{b}$ ha soluzione $\forall \underline{b} \in \mathbb{R}^n$ se e solo se $\underline{b} \in \operatorname{Im} T$, ossia se e solo se T è suriettivo, che equivale a $\det A \neq 0$, ovvero $r(A) = n$.

Sotto quest'ultima condizione, inoltre, T è iniettivo, ossia esiste un unico $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ tale che

$$T(\underline{x}) = A\underline{x} = \underline{b}.$$

Quindi la soluzione è unica.

C.V.D.

Funzioni e Operatori lineari

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$m=1 \Rightarrow$ funzioni

$m>1 \Rightarrow$ operazioni.

N.B. Se $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lineare $\Longleftrightarrow f(x) = ax;\ a \in \mathbb{R}$

Esempio

$$f(x_1,x_2) = \begin{bmatrix} 3x_1^2 + x_2 \log x_1 \\ 3e^{x_1 \cdot x_2} \\ -x_1 \end{bmatrix} \qquad f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$

Proprietà

$f(x) = ax$

1) $f(x+y) = f(x) + f(y)$
$f(x+y) = a(x+y) = ax + ay = f(x) + f(y)$ (additività)

2) $f(\alpha x) = \alpha f(x),\ \alpha \in \mathbb{R}$
$f(\alpha x) = a(\alpha x) = \alpha a x = \alpha f(x)$ (omogeneità)

Def $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è lineare quando:
1) $f(\underline{x} + \underline{y}) = f(\underline{x}) + f(\underline{y}) \quad \forall \underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$ (additività)
2) $f(\alpha \underline{x}) = \alpha f(\underline{x}),\ \forall \underline{x} \in \mathbb{R}^n,\ \forall \alpha \in \mathbb{R}$ (omogeneità)

N.B. Se $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è lineare, allora $f(\underline{0}) = \underline{0}$. Infatti la 1), per $\alpha = 0$, si scrive come: $f(\underline{0}) = 0 \cdot f(\underline{x}) = \underline{0}$

Esempio $f(x_1,x_2) = x_1^2 + x_2^2$

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$f(\underline{0}) = \underline{0}$

$\underline{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix};\ \underline{y} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

$\underline{x} + \underline{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix};\ f(\underline{x} + \underline{y}) = 1 + 9 = 10$

$f(\underline{x}) = 2;\ f(\underline{y}) = 4;\ f(\underline{x}) + f(\underline{y}) = 6$

$\Rightarrow f$ non è lineare

Esempio $f(x_1,x_2) = \begin{bmatrix} 3x_1 - 5x_2 + 8 \\ -x_1 - x_2 + 7 \\ x_1 + x_2 + 1 \end{bmatrix}$

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \quad f(\underline{0}) = f(0,0) = \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix} \neq 0$

f non è lineare

Teorema di rappresentazione di Riesz per gli operatori

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:
1) f è lineare;
2) $\exists \underset{m \times n}{A}$ tale che

$f(\underline{x}) = A\,\underline{x},\ \forall \underline{x} \in \mathbb{R}^n$.

N.B. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ (n=1; m=1)$. f è lineare se e solo se $\exists\, a \in \mathbb{R}$ tale che $f(x) = ax,\ \forall x \in \mathbb{R}$

N.B. $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\ (m=1)$

f è lineare se e solo se $\exists \underset{1 \times n}{A}$ tale che $f(\underline{x}) = A\,\underline{x} \qquad \underset{1 \times n}{A} = \underline{a} = [a_1\ a_2\ \dots\ a_n]$

$f(\underline{x}) = \underline{a} \cdot \underline{x} = [a_1\ a_2 \dots a_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n$

04/12/2024

Teorema di rappresentazione di Riesz per gli operatori

$f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:
1) f è lineare;
2) $\exists! \underset{m\times m}{A}$ tale che $f(\underline{x}) = A\,\underline{x}$, $\forall \underline{x} \in \mathbb{R}^m$. <u>A è unica</u>

<u>DIM</u> 2) $\Rightarrow$ 1) Hp. $f(\underline{x}) = A\underline{x}$

i) <u>additività</u>: $f(\underline{x}+\underline{y}) = f(\underline{x}) + f(\underline{y})$, $\forall \underline{x},\underline{y} \in \mathbb{R}^m$

$$f(\underline{x}+\underline{y}) = A(\underline{x}+\underline{y}) = A\underline{x} + A\underline{y} = f(\underline{x}) + f(\underline{y})$$

ii) <u>omogeneità</u> $f(\alpha\underline{x}) = \alpha f(\underline{x})$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\forall \underline{x} \in \mathbb{R}^m$.

$$\underline{f(\alpha\underline{x})} = A(\alpha\underline{x}) = \alpha A\underline{x} = \underline{\alpha f(\underline{x})}$$

i), ii) $\Longleftrightarrow$ f è lineare.

1) $\Rightarrow$ 2) Hp. f è lineare
Penso che $\mathbb{R}^m$ sia dotato della base standard, $\underline{e}^1, \underline{e}^2, \dots, \underline{e}^m$
$f(\underline{x})$; $\underline{x} = x_1\underline{e}^1 + x_2\underline{e}^2 + \dots + x_m\underline{e}^m$

$f(\underline{x}) = f(x_1\underline{e}^1 + x_2\underline{e}^2 + \dots + x_m\underline{e}^m) =$
poiché f soddisfa l'additività:
$= f(x_1\underline{e}^1) + f(x_2\underline{e}^2) + \dots + f(x_m\underline{e}^m) =$
poiché f soddisfa anche l'omogeneità
$$= x_1 \underbrace{f(\underline{e}^1)}_{\in\mathbb{R}^m} + x_2 \underbrace{f(\underline{e}^2)}_{\in\mathbb{R}^m} + \dots + x_m \underbrace{f(\underline{e}^m)}_{\in\mathbb{R}^m}$$
$= A\underline{x}$

$$\underset{m\times m}{A} = [\,f(\underline{e}^1)\ f(\underline{e}^2)\ \dots\ f(\underline{e}^m)\,]$$

Per mostrare che A è unica, supponiamo (per assurdo) che $\underline{f(x) = A_1\underline{x}}$, $\forall \underline{x} \in \mathbb{R}^m$; $\underline{f(x) = A_2\underline{x}}$, $\forall \underline{x} \in \mathbb{R}^m$.
$\underline{x} = \underline{e}^1$; $f(\underline{e}^1) = A_1\underline{e}^1$; $f(\underline{e}^1) = A_2 \cdot \underline{e}^1$

$$\underset{m\times m}{A}\,\underline{e}^1 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underset{m\cdot m}{A_1}\,\underset{m\times 1}{\underline{e}^1} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}$$

La prima colonna di A_1 e di A_2 sono uguali
E allo stesso modo si può dimostrare che tutte le colonne di A_1 sono uguali a quelle di A_2 quindi $A_1 = A_2$

<u>Esempio</u> $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ lineare.

$$f(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} 2x_1 + 3x_2 - x_3 \\ 4x_1 - x_2 \end{bmatrix}$$

$f(\underline{e}^1)$; $f(\underline{e}^2)$; $f(\underline{e}^3)$

$f(\underline{e}^1)=\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}$; $f(\underline{e}^2)=\begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix}$; $f(\underline{e}^3)=\begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}$

$$A=\begin{bmatrix}2 & 3 & -1\\ 4 & -1 & 0\end{bmatrix}$$

Immagine e Nucleo di un Operatore Lineare

$f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineare; $f(\underline{x})=A\underline{x}$

$\mathrm{Im}\, f=\{\underline{y}\in\mathbb{R}^m$ tali che $\exists\, \underline{x}\in\mathbb{R}^n$ per cui $f(\underline{x})=\underline{y}\}=\{\underline{y}\in\mathbb{R}^m$ tali che $\exists\, \underline{x}\in\mathbb{R}^n$ per cui $\underbrace{A\underline{x}}_{\text{comb. lineare delle colonne di } A}=\underline{y}\}$

$A=[\underline{a}^1, \underline{a}^2, \dots, \underline{a}^n]$ = spazio vettoriale generato dalle colonne di A.

$\dim \mathrm{Im}\, f$ = rango $= r(A)$

Nucleo (Kernel)

$\mathrm{Ker}\, f=\{\underline{x}\in\mathbb{R}^n : f(\underline{x})=\underline{0}\}=\{\underline{x}\in\mathbb{R}^n : A\underline{x}=\underline{0}\}$ = S. v. di $\mathbb{R}^n$ di dimensione $n-r(A)$.

$\dim \mathrm{Ker}\, f+\dim \mathrm{Im}\, f=n$ → Teorema di Nullità + Rango

Esempio

$f(\underline{x})=A\underline{x}$; $\underset{3\times 2}{A}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}$

1) Dominio; codominio?

Dominio: $\mathbb{R}^2$; codominio: $\mathbb{R}^3$

$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$

2) Scrivere un'espressione esplicita di f

$$f(\underline{x})=f(x_1,x_2)=A\cdot\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2x_1+x_2\\-x_1+x_2\\x_1+2x_2\end{bmatrix}$$

3) Determinare $\dim \mathrm{Im}\, f$ e $\dim \mathrm{Ker} f$

$\dim \mathrm{Im}\, f=r(A)=2$;

$\dim \mathrm{Ker} f=2-2=0 \iff \mathrm{Ker} f=\{\underline{0}\}$.

4) Stabilire se $\underline{y}=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\in \mathrm{Im}\, f$.

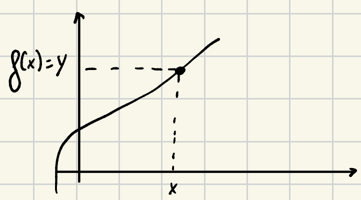
Stabilire cioè se $\exists\, \underline{x}$ tale che $A\underline{x}=\underline{y}$

$$A|\underline{y}=\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix}$$

$\det(A|\underline{y})=0 \Rightarrow r(A|\underline{y})=2$

Iniettività e suriettività per operatori lineari $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$

$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ è iniettiva quando $\underline{x}^1,\underline{x}^2\in\mathbb{R}^n$; $\underline{x}^1\neq\underline{x}^2 \Rightarrow f(\underline{x}^1)\neq f(\underline{x}^2)$.



N.B. $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ è iniettiva quando $\forall\, \underline{y}\in \mathrm{Im}\, f\ \exists!\, \underline{x}\in\mathbb{R}^n$ tale che $f(\underline{x})=\underline{y}$

$(A\underline{x}=\underline{y})$

$\Updownarrow$

$r(A)=n$

5) f è iniettiva? SI

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è suriettiva quando

$\text{Im} f = \mathbb{R}^m$

$\text{Im} f = \{ \underline{y} \in \mathbb{R}^m$ tali che esiste un $\underline{x}$ per cui $\underset{m \times n}{A} \underline{x} = \underline{y} \}$

$\text{Span} \{ \underline{a}^1, \underline{a}^2, \dots, \underline{a}^K \}$.

6) f è suriettiva? <u>No</u>

TEOREMA -H

Sia $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ un operatore lineare.

Allora $\operatorname{Ker} T$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

DIM Siano $\underline{x}, \underline{y} \in \operatorname{Ker} T$, ossia $T(\underline{x}) = T(\underline{y}) = \underline{0}$.

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ si ha

$$T(\alpha \underline{x} + \beta \underline{y}) = \alpha T(\underline{x}) + \beta T(\underline{y}) = \alpha \cdot \underline{0} + \beta \cdot \underline{0} = \underline{0} .$$

Pertanto $\alpha \underline{x} + \beta \underline{y} \in \operatorname{Ker} T$ e quindi $\operatorname{Ker} T$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^m$.

06/12/2024

$A \in M(m)$

$A^2 = A \cdot A$

$A^k = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{k \text{ volte}}$

Dalla formula di Binet si ottiene $\det(A^k) = (\det A)^k$

$\det(A \cdot B) = \det A \det B$

Def Sia $f: A \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$

Se $\forall \underline{x}, \underline{y} \in A$, $\underline{x} \geq \underline{y} \Rightarrow f(\underline{x}) \geq f(\underline{y})$ f è crescente

Se $\forall \underline{x}, \underline{y} \in A$, $\underline{x} \geq \underline{y} \Rightarrow f(x) \leq f(\underline{y})$ f è decrescente

Se f è sia crescente che decrescente, f è costante

Se $\forall \underline{x}, \underline{y} \in A$, $\underline{x} > \underline{y} \Rightarrow f(\underline{x}) > f(\underline{y})$ f è strettamente crescente

Se $\forall \underline{x}, \underline{y} \in A$, $\underline{x} > \underline{y} \Rightarrow f(\underline{x}) < f(\underline{y})$ f è strett. decrescente

Se f è crescente e $\forall \underline{x}, \underline{y} \in A$ $\underline{x} \gg \underline{y} \Rightarrow f(\underline{x}) > f(\underline{y})$ f è fortemente crescente

Se f è decrescente $\forall \underline{x}, \underline{y} \in A$ $\underline{x} \gg \underline{y} \Rightarrow f(\underline{x}) < f(\underline{y})$ f è fortemente decrescente

Proposizione

Sia $f: A \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$. Allora se f è strett. crescente $\Rightarrow f$ fortemente crescente $\Rightarrow f$ è crescente

OSS: Il viceversa non è vero, quindi

f fortemente crescente $\not\Rightarrow f$ strett. crescente

f crescente $\not\Rightarrow f$ fortemente crescente

Def Sia $f: A \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$.

Se $\forall \underline{x} \in A$, $\underline{x} \geq \underline{0} \Rightarrow f(\underline{x}) \geq 0$ f è positiva

Se $\forall \underline{x} \in A$, $\underline{x} > \underline{0} \Rightarrow f(\underline{x}) > 0$ f è strett positiva

Se $\forall \underline{x} \in A$, $\underline{x} \gg \underline{0} \Rightarrow f(\underline{x}) > 0$ f è fortemente positiva

Se f è strett. positiva $\Rightarrow f$ è fortem. positiva $\Rightarrow f$ è positiva

Proposizione

Sia $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ un $\underbrace{\text{funzionale lineare}}^{\text{funzione lineare}}$. Allora

f crescente $\Leftrightarrow f$ positiva

f strett. crescente $\Leftrightarrow f$ strett positiva

f fortem. crescente $\Leftrightarrow f$ fortem. positiva

Teorema di Riesz-Markov: (H

Sia $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$. Allora f è lineare e crescente $\Leftrightarrow \exists$ un unico vettore $\underline{X} \in \mathbb{R}^m$, $\underline{X} \geq \underline{0}$ tale che $f(\underline{x}) = \underline{X} \cdot \underline{x}$ $\forall \underline{x} \in \mathbb{R}^m$

In particolare

$\underline{X} > \underline{0} \Leftrightarrow f$ è fortem crescente

$\underline{X} \gg \underline{0} \Leftrightarrow f$ è strettam crescente

Teorema della caratt. delle f affini

Una funzione $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ è affine $\Leftrightarrow \exists$ una funzione lineare $\ell: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ e un numero reale $q \in \mathbb{R}$ tale che $f(\underline{x}) = \ell(\underline{x}) + q$ $\forall \underline{x} \in \mathbb{R}^m$

Applicazioni Cramer

(1)

Sia $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ 4 & 5 & -1 & 9 \end{bmatrix} \in M(3,4)$ e $\underline{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -6 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$

Risolvere, se possibile, il sistema $A\underline{x} = \underline{b}$

Andiamo a orlare O

$$\det \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 4 & 5 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \\ 4 & 5 \end{matrix} = -8-5-(-15+2) = 0$$

Lo orliamo

$$\det \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & -1 \\ 4 & 5 & 9 \end{bmatrix} \begin{matrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \\ 4 & 5 \end{matrix} = 0$$

$\Rightarrow rkA = 2$

$$A|b = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 5 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 4 & 5 & -1 & 9 & -6 \end{bmatrix}$$

$$\det \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 4 & 5 & -6 \end{bmatrix} \begin{matrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \\ 4 & 5 \end{matrix} = 0$$

$\Rightarrow rk\, A|b = rkA = 2 \Rightarrow$ sistema possibile

Il sistema ammette $\infty^{4-2} = \infty^2$ soluzioni

Quindi: $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ \cancel{4} & \cancel{5} & \cancel{-1} & \cancel{9} \end{bmatrix} \in M(3,4)$ e $\underline{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ \cancel{-6} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$

Poniamo $x_3 = t$ e $x_4 = s$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ t \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + t + 5s = -1 \\ -x_1 - t - s = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = -1 - t - 5s \\ -x_1 = -1 + t + s \end{cases}$$

E' un sistema quadrato con matrice dei coefficienti $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ con $\det B = 2 \neq 0$ e $\underline{b}' = \begin{bmatrix} -1-t-5s \\ -1+t+s \end{bmatrix}$

Per la formula di Cramer:

$$x_1 = \frac{\det \begin{bmatrix} -1-t-5s & 2 \\ -1+t+s & 0 \end{bmatrix}}{2} = -\frac{\cancel{2}(-1+t+s)}{\cancel{2}} = 1 - t - s$$

$$x_2 = \frac{\det \begin{bmatrix} 3 & -1-t-5s \\ -1 & -1+t+s \end{bmatrix}}{2} = -2 + t - s$$

Soluzioni:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-t-s \\ -2+t-s \\ t \\ s \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\text{è una sol particolare sistema non omogeneo}} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

tutte le soluzioni del sistema omogeneo associato

$\downarrow$

sottospazio = 2

(2) Esercizio

Sia $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineare con matrice di rappresentazione $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ e sia $\underline{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}$.

$\underline{b} \in \operatorname{Im} f$? Se sì, trovare le preimmagini di b con il teorema di Cramer.

$\underline{b} \in \operatorname{Im} f \Leftrightarrow \exists$ almeno un $\underline{x} \in \mathbb{R}^3$ tale che $\underbrace{f(\underline{x})}_{= A\underline{x}} = \underline{b}$

$\underline{b} \in \mathrm{Im} f \iff$ il sistema lineare $A\underline{x} = \underline{b}$ è possibile.

$r(A) = rkA = 2$

$$A|\underline{b} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 \\ -3 & 0 & -3 & -3 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow r(A|\underline{b}) = 2$$

$\Rightarrow$ il sistema ammette $\infty^{3-2} = \infty^1$ soluzioni

Per trovarlo uso Cramer:

Poniamo $x_3 = t$ e riscriviamo il sistema:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + t = 3 \\ -3x_1 - 3t = -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 3 - t \\ -3x_1 = -3 + 3t \end{cases}$$

è un sistema quadrato con matrice dei coefficienti

$B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$, $\det B = -3$ e $\underline{b}' = \begin{bmatrix} 3-t \\ -3+3t \end{bmatrix}$

$$x_1 = \frac{\det \begin{bmatrix} 3-t & -1 \\ -3+3t & 0 \end{bmatrix}}{-3} = \frac{-3+3t}{-3} = 1 - t$$

$$x_2 = \frac{\det \begin{bmatrix} 2 & 3-t \\ -3 & -3+3t \end{bmatrix}}{-3} = \frac{-6+6t+9-3t}{-3} = -1 - t$$

Soluzioni:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-t \\ -1-t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

sono i vettori di $\ker(f)$

f è iniettiva? NO

Problema dei minimi quadrati:

Sia $A \in M(m;n)$ e $\underline{b} \in \mathbb{R}^m$

$A\underline{x} = \underline{b}$

In generale il sistema può non ammettere soluzione e questo capita spesso se $m \geq n$

▷ Ci si chiede: ci sono condizioni per cui esiste $\underline{x}^* \in \mathbb{R}^n$ che si "avvicina" ad essere una soluzione?

Cioè:

$\|A\underline{x}^* - \underline{b}\|$ vogliamo che sia piccola $\iff$ $\|A\underline{x}^* - \underline{b}\|^2$ vogliamo che sia piccola.

Quindi cerchiamo $\underline{x}^* \in \mathbb{R}^n$ che risolva il problema di ottimizzazione

$$\min \|A\underline{x} - \underline{b}\|^2 \quad \text{sub } \underline{x} \in \mathbb{R}^n$$

Def. Un vettore $\underline{x}^* \in \mathbb{R}^n$ che risolva il problema $\min \|A\underline{x} - \underline{b}\|^2$ sub $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ è un minimo quadrato del sistema lineare $A\underline{x} = \underline{b}$

TEOREMA

Sia $m \geq n$ e $A \in M(m;n)$, $\underline{b} \in \mathbb{R}^m$. Se $r(A) = n$, $\exists!\ \underline{x}^* \in \mathbb{R}^n$ tale che $\underline{x}^*$ è soluzione di $\min \|A\underline{x}^* - \underline{b}\|^2$ sub $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$

(i.e. $\underline{x}^*$ è minimo quadrato)

Oss. Sia $g(\underline{x}) = -\|A\underline{x} - \underline{b}\|^2$, $A \in M(m;n)$, $\underline{b} \in \mathbb{R}^m$, $m \geq n$

Allora $\underline{x}^*$ è soluzione di $\min \|A\underline{x} - \underline{b}\|^2$ sub $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ $\iff$ $\underline{x}^*$ è soluzione di $\max g(\underline{x})$ sub $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$

TEOREMA

Sia $A \in M(m;n)$, $\underline{b} \in \mathbb{R}^m$, $m \geq n$.

Se $r(A) = n$, la funzione $g(\underline{x}) = -\|A\underline{x} - \underline{b}\|^2$ è supercoerciva e strettamente concava.

TEOREMA (Riesz) - H

Una funzione $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ è lineare se e solo se esiste un unico vettore $\underline{v} \in \mathbb{R}^m$ tale che

$$f(\underline{x}) = \underline{v} \cdot \underline{x}, \quad \forall \underline{x} \in \mathbb{R}^m.$$

DIM. "Se". Supponiamo che $f(\underline{x}) = \underline{v} \cdot \underline{x}$, per qualche $\underline{v} \in \mathbb{R}^m$.

Allora:

$$f(\underline{x}+\underline{y}) = \underline{v}(\underline{x}+\underline{y}) = \underline{v}\,\underline{x} + \underline{v}\,\underline{y}, \qquad \forall \underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{Q}^m$$

e

$$f(\lambda \underline{x}) = \underline{v} \cdot (\lambda \underline{x}) = \lambda \underline{v}\,\underline{x} = \lambda f(x), \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \ \forall \underline{v} \in \mathbb{R}^m.$$

Pertanto f è lineare.

"Solo se". Supponiamo che f sia lineare e consideriamo la base canonica di $\mathbb{R}^m$ formata dai vettori $\underline{e}^1, \underline{e}^2, \dots, \underline{e}^m$.

Poniamo $\underline{v} = (f(\underline{e}^1), f(\underline{e}^2), \dots, f(\underline{e}^m)) \in \mathbb{R}^m$.

Ogni $\underline{x} \in \mathbb{R}^m$ si può scrivere come $\underline{x} = \sum_{i=1}^{m} x_i \underline{e}^i$

Pertanto

$$f(\underline{x}) = f\left(\sum_{i=1}^{m} x_i \underline{e}^i\right) = \sum_{i=1}^{m} x_i f(\underline{e}^i) = \underline{v} \cdot \underline{x}, \qquad \forall \underline{x} \in \mathbb{R}^m.$$

Per mostrare che $\underline{v}$ è unico, supponiamo che esistano due vettori $\underline{v}^1$ e $\underline{v}^2$ di $\mathbb{R}^m$ tali che

$$f(\underline{x}) = \underline{v}^1 \cdot \underline{x} \quad \text{e} \quad f(\underline{x}) = \underline{v}^2 \underline{x} \qquad \forall \underline{x} \in \mathbb{R}^m$$

$\forall i = 1, \dots, m$ si ha:

$$f(\underline{e}^i) = \underline{v}^1 \underline{e}^i = v_i^1 = \underline{v}^2 \underline{e}^i = v_i^2$$

e quindi

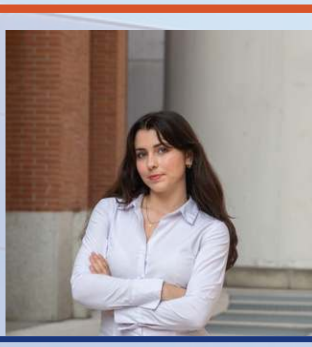
$$\underline{v}^1 = \underline{v}^2.$$

C.V.D.

PER DUBBI O SUGGERIMENTI SULLA DISPENSA

ALESSIA BRONGO
alessia.brongo@studbocconi.it
@_.alessiabrongo._
+39 3662497117

PER INFO SULL'AREA DIDATTICA



NICOLA COMBINI
nicola.combini@studbocconi.it
@nicolacombini
+39 3661052675

MARTINA PARMEGIANI
martina.parmegiani@studbocconi.it
@martina_parmegiani05
+39 3445120057

MARK OLANO
mark.olano@studbocconi.it
@mark_olano._
+39 3713723943

TEACHING DIVISION

I NOSTRI PARTNERS

Wall Street English®

TEGAMINO'S

ETHAN SUSTAINABILITY

700+ CLUB

LA PIADINERIA

LA PIADINERIA dal 1994